

De reella talen: talsymbolernas analytiska hantverk

Tomas Malm

Didymos texter i matematik

De reella talen: talsymbolernas analytiska hantverk

© 2018 Tomas Malm & Didymos Bokförlag

Version 1.8

e-ISBN: 978-91-984767-5-0

Mer information om Didymos Bokförlag och dess anknutna författare finns på vår webbplats:

didymos-bokforlag.com

För detaljer gällande rättigheter med mera vänligen kontakta förlaget via dess webbplats.

Innehåll

1	Abstract	3
2	De reella talen: talsymbolernas analytiska hantverk	4
2.1	Särarten hos olika slags frågor	4
2.2	Det reella talområdet $\mathbb{R}$: rationella och irrationella	6
2.2.1	Newtons beskrivning av det reella talet som bestämning av kvantitet och det abstraherade storleksförhållandet	6
2.2.2	Tallinjen som representation av de reella talen	8
2.2.3	Rationella tal och decimaltal	11
2.2.4	Irrationella tal och inkommensurabla storheter	12
2.2.5	Mängdlärans beteckningar för talområden	15
2.3	Den reella talsymbolen och approximationens principskiss	16
2.3.1	Reella talsymboler: konstanter respektive variabler	17
2.3.2	Approximationsprincipen för $\mathbb{R}$	19
2.3.3	Approximationskriteriet uttryckt i termer av ordningsrela- tionen	22
2.3.4	Notation för approximation, närmevärden och felgränser till reella tal	24
2.3.5	Tre skilda begrepp: decimaltal, decimalutveckling, reellt tal .	27
2.3.6	Storheter jämfört med matematiska talsymboler	32
2.4	Reell aritmetik: praktiska beräkningar med irrationella tal	33
2.4.1	Arvsprincipen för $\mathbb{R}$: räknelagar och ordningsegenskaper . .	33
2.4.2	Utvidgningsprincipen för $\mathbb{R}$ och de fyra räknesätten	37
2.4.3	Kvadratrötter: approximationsregeln och några räknelagar .	42
3	Kommentarer	47
3.1	Matematisk fördjupning	47
3.1.1	Talet π	47
3.2	De reella talens historia	51
3.2.1	Jämförelser med den grekiska matematiken	51
3.2.2	Renässansen och den naturvetenskapliga revolutionen under 1600-talet: decimalsystemets framträdande på den europeis- ka scenen och den newtonsk-cartesiska konceptionen om ett tal.	52
3.2.3	1800-tal: analysens aritmetisering, rigorositetssträvanden och de mängdteoretiska konstruktionerna	53
3.3	Logiska och filosofiska reflektioner	57

3.3.1	En symbolisk representationsprincip?	58
3.3.2	Decimalutvecklingens summa som symbolisk konstrukt . . .	61
3.3.3	Samband med de reella talens fullständighetsegenskap	64
3.3.4	Ett identitetskriterium för de reella talen? Oskiljaktighet upp till bråk	67
3.3.5	Tecknet och symbolen	70
3.3.6	”Hur vet man att kvadratroten verkligen existerar?”	73
3.3.7	Ett försök till definition?	74
3.3.8	Konstruktion av $\mathbb{R}$ och det symboliska perspektivet	78
3.4	Förslag på vidare läsning	81
4	Lock/portar	83

1 Abstract

I det här dokumentet tar vi som utgångspunkt *rationell aritmetik*: grundläggande kunskaper om räkning med de rationella talen (med heltal, bråk och decimaltal).

I den matematik som normalt studeras — i grundskola eller på gymnasium, universitet eller teknisk högskola — kan ett tal vara icke-rationellt av två anledningar: Den ena möjligheten är att det är ett reellt tal som är *irrationellt*, som man säger. Exempel på irrationella tal är $\sqrt{2}$ och π . Den andra möjligheten är att det är ett *komplex tal*, på vilket exempel är talet $3 + 4i$.

De reella talen kan upplevas som någonting mer problematiskt, undflyende och oklart jämfört med dem som samlas under termen ’rationellt tal’. Detta är inte alls någon ovanlig upplevelse för den som studerar matematik, även på högskolenivå. Att det reella talbegreppet kan upplevas som mer förvirrande tror jag kan bero på olika saker. En kan vara att man gör olika förväxlingar mellan reellt tal, decimaltal och decimalutveckling — detta är tre skilda saker. Det mest påtagligt förvirrande momentet är nog förekomsten av de så kallade ’irrationella talen’.

Syftet med det här dokumentet är dels att påminna om och sammanställa de grundläggande begrepp, regler och allmänna idéer som man behöver i det praktiska arbetet med matematikens reella tal, och dels att efter bästa förmåga i någon mån reda ut begreppen och nå större klarhet. På grund av det här talbegreppets relativa komplexitet är det här artikeln avsevärt tjockare än de övriga artiklar som ingår i portföljen *Den första matematiken*.

2 De reella talen: talsymbolernas analytiska hantverk

2.1 Särarten hos olika slags frågor

Det finns olika sorters frågor rörande de reella talen. En del av dessa frågor har inte något helt okontroversiellt svar. Vissa frågeställningar, eller punkter av upplevd oklarhet, leder över till matematikfilosofin. Exempel på sådana mer kontroversiella frågeställningar med tentakler till filosofin är:

”Vad är ett irrationellt tal, egentligen?”

”Hur vet man att den och den kvadratroten (decimalsummeföljden, gränsvärdet) alls existerar?”

”Vad är definitionen av ett reellt tal?”

”Vad är en verkligt logiskt stringent, rigorös, framställning av de reella talens kalkyl och matematisk analys?”

”Vilken logisk status har de mängdteoretiska konstruktionerna av de reella talen?”

”Vilken status har formell logik, mängdlära och överhuvudtaget axiomatiskt tänkande i relation till matematiken som helhet?”

Jag betraktar det därför som lämpligt att förlägga dessa och liknande frågeställningar till andra sammanhang, och i denna text endast erbjuda läsaren förslag på fortsatt och fördjupande läsning.

Det råder inte någon självklar enighet beträffande *precis alla* frågor om matematiken — inte ens bland matematiker. En del matematiker (och filosofer) har sina svar på frågorna, men samtidigt finns det andra matematiker (filosofer) som inte vore beredda att hålla med, och ytterligare de som inte känner sig så säkra. Där den ene känner sig tillfredsställd med ett svar, är det inte garanterat att den andre också gör det.

Är denna omständighet något att förvånas över? Jag skulle nog svara att det inte alls är något att häpna över, bara därför att vi har att göra med matematik. Så där är det ju med de allra flesta teoretiska verksamheter; matematiken är inkluderad. Det är om man klänger fast vid en viss bild och håller sig med vissa förväntningar på hur verkligheten borde vara, som det här blir till något problem.

— Däremot råder inte någon *större* oenighet om hur man ska handskas med de reella talen *i praktiken*, närmare bestämt såsom verktyg inom olika arbetsområden, genom tillämpningarna inom ämnen såsom ekonomi, fysik och kemi, och även inom lejonparten av den rent matematiska forskningen. Det är verkligen en otvivelaktig, definitiv, karakteristisk sanning om ämnet:

I praktiken råder en oerhört hög och påfallande grad av konsensus beträffande matematiken och dess tillämpning, kring frågor ställda såväl inom ämnet som omkring det.

Det vi ska göra i den översiktliga framställning som ges här är därför egentligen bara att på ett tydligt och precist sätt formulera *de praktiska regler för opererandet* med reella tal som gäller inom såväl matematiken — som den normalt lärs ut och utövas på universitet och teknisk högskola — som inom naturvetenskaplig forskning, ekonomi och ingenjörskonst. Vi ska alltså fastslå *gällande praxis*. Detta ger läsaren det *säkerhetsbälte* han eller hon behöver i arbetet med att lära sig och använda matematik, och kanske till och med utveckla ny matematik.

Det handlar alltså inte om att matematiken på något sätt skulle befinna sig i gungning, i någon allvarlig ”grundvalskris”, bara därför att vi konstaterar att det vid sidan om den påfallande graden av praktisk konsensus, existerar frågeställningar där det inte förhåller sig på det sättet. Ett annat enkelt exempel: det råder fullständig konsensus beträffande frågan ”Vad är summan av 5 och 7?” eller ”Om jag har fem äpplen i en låda och sju i en annan, hur många har jag totalt?”; men knappast någon konsensus vad gäller frågan ”Vilken logisk status har satsen ' $5 + 7 = 12$ ' i förhållande till den naturliga verkligheten? Är det en sorts absolut sanning inristad som det vore på eteriska stenar i evigheten, eller är det mer någonting analogt med en mänsklig överenskommelse beträffande hur vi ska räkna? Är det ett axiom, en definition, ett teorem? —”

Det finns alltså många (mer eller mindre) precisa saker man kan säga om ’de reella talen’, som alla matematiskt kompetenta personer skulle vara överens om, utan att därmed förutsätta något sådant som en standardiserad definition, som skulle vara analog med definitionen av exempelvis ett primtal. Ibland visar det sig också värdefullt för förståelsen att anknyta den undervisande framställningen till en liten smula begreppshistoria. De vidare matematikfilosofiska, logisk-begreppsliga frågeställningar som kan uppstå hos en del studenter förlägges till fortsatta texter och andra författares verk, med förslag på vidare läsning. Här finns frågor som knappast kan avhandlas fullständigt i ett dokument av den här ringa omfattningen.

2.2 Det reella talområdet $\mathbb{R}$: rationella och irrationella

2.2.1 Newtons beskrivning av det reella talet som bestämning av kvantitet och det abstraherade storleksförhållandet

Under tiden för den naturvetenskapliga revolutionen ger Newton i sin skrift *Universal Arithmetick* en beskrivning av engelskans *number*, vars allmänna idé eller konception här motsvarar den samtida matematikens term 'reellt tal', på följande sätt:

Med ett tal förstår vi, inte så mycket en given mångfald av enheter, utan snarare *det abstraherade storleksförhållandet* [eng. orig. *the abstracted ratio*] mellan en viss storhet och en annan bestämd storhet hörande till samma *sort* [kategori, dimension, min anm.], där vi låter den senare fungera som vår *enhet*. Och dessa tal är av *tre typer*; heltal, bråk, och irrationellt: Ett heltal är *det som mäter* en storhet av ett helt antal enheter, ett bråk det som mäter ett visst antal andelar av enheten, och ett irrationellt tal det som mäter något i jämförelse med vilket enheten är inkommensurabel.¹

Newtons beskrivning har starka beröringspunkter med fysikens begrepp *storhet* — motsvarande den samtida engelskans *physical quantity* —, vilket är något som låter sig mätas, varvid man uppger mätetal och enhet. Exempel på fysikaliska storheter är längd, tid, massa, temperatur och energi. En hel del matematiker skulle beskriva den här *newtonsk-cartesianska konceptionen*, som vi kunde välja att kalla den, för "den intuitiva idén" bakom begreppsbyggnaden reellt tal. Den ger nämligen både grundritningen för tallinjen och koordinatsystemet, och är viktig att ha grepp om i matematisk problemlösning och modellering (inom fysik, kemi, etc).

Låt oss för tydlighetens skull analysera Newtons beskrivning i ett antal punkter:

1. Ett sätt att uppfatta det reella talet är som själva *det abstraherade storleksförhållande* som det är möjligt för en storhet och en annan storhet som tillhör samma kategori att stå i till varandra, till exempel två längder, två areor, två vikter, två tidsintervall.
2. Vi kan föreställa oss att en storhet av en given kategori fixeras och får fungera som *enheten*, svarande mot talet 1.
3. Ett tal kan då vara av tre arter: heltal, bråk eller irrationellt.

¹Isaac Newton, *Universal Arithmetick*, kap. 1 ("Notation"), artikel I. Min översättning från den engelska utgåvan från 1768. Samtliga kursiveringar är mina tillägg, vars syfte är att lyfta fram den newtonska konceptionens komponenter: abstraherat storleksförhållande, kategori/dimension, enhet, tre typer av tal och talet som det som mäter snarare än det mätta. I det engelska originalet heter irrationellt tal "surd".

4. *Heltalen* svarar mot en mångfald hela enheter.
5. *Bråken* svarar mot en mångfald delar av en hel enhet.
6. *Irrationella tal* svarar mot de storheter som är inkommensurabla med enheten (men som fortfarande är av samma kategori).

Som vi ser följer den vanliga tallinjens konstruktion Newtons rekommendationer.² Vid sidan om geometrin kan kategorin av storheter vara fysikalisk. Tag som exempel kategorin vikt eller massa. Då är kilogramprototypen i Paris ett exempel på fixering av enheten 1. Varje annan vikt, om vi följer Newtons tankespår, är en storhet som ligger inom samma kategori som kilogramprototypen och låter sig därmed jämföras med denna. Det är verkligen så man resonerar i klassisk fysik. Genom mätning av en viss vikt på en våg (kalibrerad för kilogram) erhålles måttet på viktens storlek som ett måttetal i enheten kilogram, exempelvis " $m = 4,5$ kg".

Matematikens vidaste talbegrepp för bestämning av *kvantitet* heter alltså de reella talen. Sedan Aristoteles skiljer man mellan:

kontinuerlig kvantitet: kvantitet i betydelsen storleken eller magnituden av något som kan tänkas variera över en kontinuerlig skala, till exempel mängden vatten i en regntunna mätt i enheten liter;

diskret kvantitet: kvantitet i betydelsen antalet av något, till exempel antalet tänder i munnen.

Inom matematiken och vetenskapen tänker man normalt som så att svaret på en fråga av dessa och liknande slag är eller kan representeras av något reellt tal:

A: "Hur många stolar får plats i det rummet? Vi behöver åtminstone få in 20 pers." —

B: "Det får plats minst 35 stolar, inga problem."

A: "Hur många deciliter vatten behövs till bröddegen?" — B: "2,5 deciliter"

A: "Hur många kilometer är det från Stockholm till Uppsala?" — B: "Cirka 71 km via E4:an"

A: "Hur högt är trädet jämfört med björnen som står bredvid det?" — B: "Om jag mäter med linjal får jag att trädet är 7,3 gånger så högt som björnen."

A: "Hur stor är diagonalen i en kvadrat jämfört med sidan?" — B: "Diagonalen är kvadratroten ur två gånger större än sidan"

A: "Hur stor är omkretsen av en cirkel jämfört med diametern?" — B: "Pi gånger större"

²Så kallade "negativa tal" tycks inte uppfattas som en speciell typ av tal, i betydelsen ett mått på det kvantitativa förhållandet mellan möjliga storheter, utan som en teknisk anordning, ett visst sätt att göra bruk av tal.

A: "Hur många kilogram väger blyklumpen?" — B: "4,53 kg enligt vågen"

"Vad är temperaturen inne i kylskåpet fem minuter efter att det blivit påslaget?"

"Hur många varv rör sig Jorden kring sin egen axel på ett år?"

"Hur lång tid tar det för ljuset att färdas från Solen till Jordens yta (mätt med en klocka på jorden)?"

Denna tankegång utgör *en vägledande princip för matematisk modellering* av fysikaliska situationer, såsom temperaturens variation över tid vid påslagning/avstängning av ett kylskåp eller höjden hos ett föremål som faller mot jordytan. Där låter man typiskt temperaturen representeras av någon reell variabel T och höjden av en variabel h eller kanske y .

Om man följer den newtonsk–cartesianska konceptionen om ett reellt tal så kan man alltså säga såhär:

Det reella talet uppfattas här som det abstraherade storleksförhållande, med hjälp av vilket förhållandet mellan två givna storheter hörande till samma kategori, dimension låter sig anges, uttryckas, mätas. Talet är alltså 'måttet' och inte 'det mätta'.

Det vill säga, det avser själva förhållandet utan hänsyn till någon specifik enhet. Om en stav är 4,5 meter lång, så är storleksförhållandet mellan staven och en meterlinjal 4,5:1. Samma storleksförhållande 4,5:1 skulle dock kunna råda mellan en viss vikt och kilogramprototypen, i vilket fall vikten skulle ha massan 4,5 kg. Det reella talet '4,5' är här en *symbol* som i sin roll abstraherar från specifika omständigheter, från specifika fysikaliska eller geometriska storheter, enheter eller kategorier av storheter.

Denna allmänna idé om det reella talets roll är precis lika viktig idag på 2000-talet i studier och forskning i matematik och vetenskap som på Newtons tid (på universitet och högskola likaväl som för undervisningen i grundskola och gymnasium).

2.2.2 Tallinjen som representation av de reella talen

I några samtida uppslagsverk av typen encyklopedi läser man följande beskrivningar³ av 'de reella talen', i jämförelse med och kontrast till Newtons:

³Från 16 september 2015.

”Reellt tal, tal som kan åskådliggöras som punkter på en tallinje.” — Nationalencyklopedien

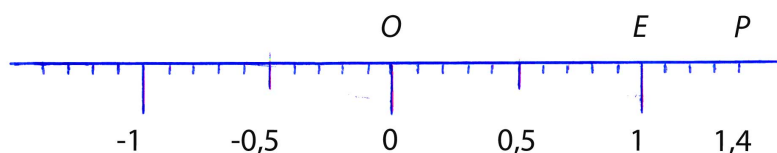
”De reella talen är de tal som man vanligtvis menar med tal. De kan beskrivas som alla punkter på en kontinuerlig linje, utan att det finns glapp mellan talen i linjen.” — Wikipedia (svenska)

”In mathematics, a real number is a value that represents a quantity along a continuous line.” — Wikipedia (engelska)

Det här sättet att beskriva de reella talen bygger alltså på **tallinjen** som visuell, bildmässig form för representationen av de reella talen.

I figur 1 visas en tallinje: idén är att en given sträcka/punkt på tallinjen motsvarar det reella tal som ’mäter’ storleksförhållande och placering i förhållande till origo jämfört med en på tallinjen fixerad ’längdenhet’. Denna idé är som vi ser helt i linje med Newtons beskrivning av *number*. Den här bilden som tallinjen erbjuder är väldigt användbar — eller nödvändig — i samband med problemlösning och modellering. Inte minst är den ett värdefullt verktyg i matematikundervisning. Tallinjer fungerar som axlar för koordinatsystem, i analytisk geometri exempelvis.

En anledning till att tallinjen fungerar utmärkt som tankeverktyg för arbetet med reella tal är att bråken, det vill säga alla rationella tal, låter sig representeras på tallinjen. Man talar också om den tallinje som endast innehåller alla bråk, positiva och negativa, som ”*den rationella tallinjen*”.



Figur 1: Tallinjen eller ”tallinjalen”. Punkten O kallas origo och sträckan OE är enheten, motsvarande talet 1. Punkter på tallinjen till höger om origo motsvarar positiva reella tal och punkter till vänster negativa reella tal. Sträckan OP motsvarar talet 1,4 eftersom OP är 1,4 i jämförelse med OE . Storleksförhållandet mellan OP och OE är 1,4 (14 10-delar).

Själva principskissen för tallinjens konstruktion ser ut såhär:

1. En punkt O på tallinjen motsvarar talet 0 och kallas för *origo*.
2. En sträcka OE fixeras och får fungera som *enhet* på tallinjen. Sträckan OE motsvarar alltså talet 1.
3. En given sträcka OP motsvarar nu ett tal som anger *storleksförhållandet (proportionen)* mellan sträckan OP och enheten OE . (I geometrin tänker man som så att detta



Figur 2: En vanlig fysisk linjal av plast.

reella tal är *längden* av sträckan OP .)

4. Tillägget är att det tal som OP motsvarar också får ett tecken $+/-$ beroende på vilken sida om origo punkten P ligger. Riktningen från origo till punkten E motsvarar *positiva* tal och motsatt riktning från origo *negativa* tal.

Där är konstruktionen färdig.

Som vi ser av figuren är grundritningen för tallinjen en vanlig *graderad linjal* av trä, metall, plast, med mera. Istället för tallinjen skulle man också kunna säga "*tallinjen*". Detta är inte gängse språkbruk, men jag tycker det är ett bra ord: läsaren har säkert haft erfarenhet av att jobba med *fysiska* linjaler, men inte med en "oändligt lång rät linje utan bredd". I likhet med en fysisk linjal kan man tänka på tallinjen som en *matematisk* linjal, som i tanken kan förlängas precis hur långt man vill. Egentligen spelar det ingen roll vilken av de två bilderna man använder, så länge de används på samma sätt och är till hjälp för en i arbetet med matematiken.

Det kan vara värt att understryka att ett reellt tal (naturligtvis) inte är samma sak som en sträcka eller punkt på en tallinje, men att tallinjen utgör en *representation* av ett talbegrepp. En given sträcka på tallinjen *motsvarar*, *representerar* det reella tal som så att säga uttrycker just det abstraherade storleksförhållande som sträckan står i i förhållande till enhetssträckan.

Inom euklidisk (klassisk) geometri, som den lärs ut och utövas idag, tänker man sig också att varje geometrisk sträcka eller punkt på tallinjen motsvaras av ett och endast ett reellt tal, vilket är utgångspunkten för koordinatsystemet. I moderniserade axiomatiska framställningar av geometrin formuleras denna regel inte sällan explicit som ett av axiomen.

2.2.3 Rationella tal och decimaltal

Ett tal säges vara **rationellt** om det låter sig uttryckas exakt som ett enda bråk a b -delar. Man säger också: om det låter sig *skrivas som* ett bråk.

Bråk är det som alltid och utan undantag kommer till användning i samband med faktisk, empirisk mätning av storheter i hantverk, naturvetenskap, ingenjörskonst, med mera.

Två bråk som uttrycker precis lika mycket av en och samma delbara helhet **identifieras under likhetstecknet** och betraktas som uttryck, som **representanter**, för samma rationella tal. Så kan vi till exempel skriva:

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9}$$

Detta att två bråk 'har samma värde' kan förklaras på två med varandra sammanhängande sätt:

- det ena bråket kan förlängas så att det blir exakt samma bråk som det andra; eller
- de två bråken uttrycker precis lika mycket, lika stor mängd av en given enhet (delbar helhet, delbarhet)

1 3-del av en meter är precis lika mycket som 2 6-delar av en meter (eller pannkaka eller något). Vi ser också hur 1 3-del kan förlängas till 2 6-delar genom att multiplicera med 2 i bråkets bägge led (nämnare och täljare):

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6}$$

Exempel 1. Alla dessa tre tal är rationella:

$$7 \quad \frac{8}{5} \quad 1,618$$

Heltalet 7 är rationellt, eftersom det kan identifieras med bråket '7 hela'. Åtta femtedelar är ju ett bråk, och därför rationellt. Decimaltalet 1,618 kan också skrivas som bråket $\frac{1618}{1000}$ -delar. $\square$

Det kan vara bra att formulera definitionen av rationellt tal i formen av en matematisk sats:

[1] *Ett tal är rationellt om och endast om det kan uttryckas exakt som ett enda*

bråk.

Exempel 1 är en påminnelse om att varje decimaltal i själva verket är en speciell typ av bråk: det är ett bråk som kan uttryckas som summan av så många tiondelar, hundradelar, och så vidare. Ett annat och äldre ord för decimaltal är av denna anledning "*decimalbråk*". Däremot gäller inte det omvända: inte varje rationellt tal är ett decimaltal.

Exempel 2. Tag som exempel bråket $1/3$. En tredjedel kan approximeras med decimaltal men inte uttryckas exakt som ett enda decimaltal. Det gäller exempelvis att

$$\frac{1}{3} \approx 0,333333$$

men $1/3$ är inte exakt lika med $0,333333$. (Multiplicerar vi högerledet med 3 får vi $0,999999$, ett tal strängt talat mindre än 1.) $\square$

Låt oss understryka dessa två viktiga faktum genom att sätta dem på display som en matematisk sats:

[2] *Varje decimaltal (decimalbråk) är ett rationellt tal; det kan uttryckas som ett enda bråk. Däremot är inte varje rationellt tal ett decimaltal.*

Det finns gott om bråk som inte kan uttryckas exakt som ett enda decimaltal. Med mängdlärans språk skulle man säga att decimaltalen utgör en äkta delmängd av de rationella talen.

2.2.4 Irrationella tal och inkommensurabla storheter

Hur kommer det sig då att man i matematiken har upplevt ett behov (eller sett sig tvingad) att införa ytterligare ett talområde de reella talen, som också i någon mening motsvaras av tallinjen, men som ändå är mer omfattande än de rationella talen?

— Matematiker i det antika Grekland (pythagoréerna) trodde faktiskt länge att precis alla kvantiteter, eller storleksförhållanden mellan storheter, i princip var möjliga att uttrycka exakt som förhållanden mellan heltal (det vill säga som bråk). Det kom som en mycket stor överraskning (som en skandal till och med) när man gjorde den upptäckten att diagonalen och sidan i en geometrisk kvadrat inte kan uttryckas exakt som ett enda bråk — åtminstone i en *matematisk* mening av orden 'exakt' och 'upptäckt'. Ett annat sätt att beskriva det här epokgörande momentet i vetenskapens och filosofins historia vore kanske följande:

Matematikerna i det antika Grekland gjorde någon gång den upptäckten, att förhållandet mellan vissa geometriska storheter (såsom diagonalen och sidan i en kvadrat och det gyllene snittet) inte låter sig analyseras på ett ändligt sätt i formen av ett enda bråk.

Däremot har det (såvitt jag vet) aldrig varit någon matematiker som har påstått att förhållandet inte låter sig approximeras med bråk, och det utan någon *given* gräns för finheten i närmevärde. Det man verkligen kan göra i matematiken är alltså att *approximera* storleksförhållandet mellan diagonalen och sidan med närmevärden, i princip hur nära som helst, men aldrig så att felet i närmevärde blir exakt lika med noll. Kalla storleksförhållandet mellan diagonalen d och sidan s för F (se figur 3). Här är några exempel på approximationer av, närmevärden till F genom en successivt finare följd av decimaltal:

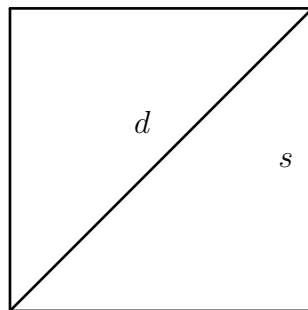
$$F \approx 1,5$$

$$F \approx 1,41$$

$$F \approx 1,414$$

$$F \approx 1,4142$$

Och så vidare.



Figur 3: Diagonalen och sidan i en kvadrat är inkommensurabla. Kalla storleksförhållandet mellan diagonalen d och sidan s för F . Då finns det inget bråk som exakt uttrycker F .

De grekiska matematikerna kom därför att dela in par av geometriska storheter i sådana som är **kommensurabla** ("jämförbara") och sådana som är **inkommensurabla** ("ojämförbara"). Diagonalen och sidan i kvadraten utgör exempel på inkommensurabla storheter. Storleksförhållandet mellan kommensurabla storheter går att uttrycka exakt med ett enda bråk. Storleksförhållandet mellan inkommensurabla storheter går endast att approximera med bråk.

Exempel 3. (a) Omkretsen och sidan i en kvadrat är kommensurabla storheter. Storleksförhållandet mellan omkretsen och sidan är fyra till ett (4:1). Det betyder att omkretsen är lika stor som 4 hela av sidan.

(b) Sträckan OP och sträckan OE i figur 1 är kommensurabla. Storleksförhållandet mellan OP och OE är 1,4. Det är samma sak som att säga att OP är 14 tiondelar av OE . $\square$

De grekiska matematikerna hade inget allmänt talbegrepp som motsvarar vår moderna matematiks 'reellt tal' eller 'irrationellt tal'. Som ett abstrakt aritmetiskt talbegrepp uppträder de reella talen i samband med decimalsystemets framträdande på den europeiska scenen och ungefär vid tiden för den naturvetenskapliga revolutionen. Den tanken förefaller oss dock inte långsökt att storleksförhållandet mellan diagonalen och sidan borde uppträda som ett av talen på tallinjen, eftersom vi kunde välja sidan i kvadraten som enheten 1 och därefter lägga diagonalen åt höger utmed tallinjen (detta kan konstruktivt enkelt utföras med hjälp av en passare).

Det reella tal som enligt modern matematik motsvarar storleksförhållandet mellan diagonalen och sidan i en geometrisk kvadrat känner vi igen som *kvadratroten ur två*, med matematisk notation

$$\sqrt{2}$$

Detta tal kännetecknas (bland annat) av egenskapen att produkten av roten ur två med sig självt är lika med två:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

I läroböckerna är talet $\sqrt{2}$ det vanliga exemplet på ett reellt tal som inte är rationellt, utan som man säger "irrationellt". Det finns alltså inget bråk vars kvadrat är exakt lika med 2. Det klassiska beviset för att det förhåller sig så ges bland annat i artikeln *Kvadratroten ur två eller diagonalen och sidan i en kvadrat*.

Ett reellt tal säges överhuvudtaget vara **irrationellt** om det inte är rationellt, vilket implicerar att det (i en matematisk bemärkelse) inte låter sig uttryckas helt exakt som ett enda bråk.

Exempel 4. Här är några typiska exempel på irrationella tal:

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \pi, \varphi, e$$

Talet φ (grekiskans lilla fi) är *det gyllene snittet*. Längst till höger i listan finner

vi talet e , som är en mycket viktig matematisk konstant som kommer till användning inom den matematiska analysen, ett av naturvetenskapens främsta verktyg. $\square$

Däremot kan varje irrationellt tal entydigt approximeras med bråk — såsom decimaltal — till varje given noggrannhet, så länge felet tillåts vara åtminstone lite större än noll. Att approximationen sker *entydigt* innebär att man inte kan finna två närmevärden till det irrationella talet som ligger inom disjunkta (åtskilda) intervall på den rationella tallinjen. Detta är också ett praktiskt viktigt faktum om vår matematik som förtjänar att understrykas:

[3] *Varje irrationellt tal kan på ett entydigt sätt approximeras med bråk (såsom decimaltal) till varje given noggrannhet, åtminstone så länge felgränsen ε är något större än noll.*

Detta betyder, åtminstone teoretiskt sett, att om a är ett irrationellt tal och vi exempelvis väljer noggrannheten, felgränsen $\varepsilon = 10^{-6} = 0,000001$ (en miljondel), så finns det minst ett rationellt tal q som ligger inom ett avstånd av en miljondel från a ; och på samma sätt med varje annan felgräns vi kunde välja, om det så vore $\varepsilon = 10^{-1000000000000}$ (en biljondel) eller $\varepsilon = 10^{-10^{1000}}$.

För praktiska syften räcker det dock (för det mesta) gott och väl med en approximation av en given irrationell talsymbol till några få decimaler. Även i de mest sofistikerade teknologiska och naturvetenskapliga sammanhang används garanterat aldrig mer än 50 decimaler till π , för att ta ett viktigt exempel. NASA använder som mest 16 decimaler för sitt rymdprogram och GPS (*Global Positioning System*) för Ortsbestämning på jordytan med hjälp av satelliter. Vid precisionsbestämning av fundamentala fysikaliska konstanter görs beräkningarna med 32 decimaler till π . Det finns alltså i praktiken aldrig något behov av något sådant som en ”oändlig följd av decimaler” efter decimalkommat. Och omvänt finns naturligtvis de praktiska begränsningar som den tekniska utrustningen sätter.

2.2.5 Mängdlärans beteckningar för talområden

Låt oss påminna oss om den gängse notationen för de olika talområden vi här rör oss med.

Vanligtvis betecknas **mängden av rationella tal** med $\mathbb{Q}$ och **mängden av reella tal** med tecknet $\mathbb{R}$ i matematiken.

De rationella talen utgör en delmängd av mängden av reella tal. Med mängdlärans

notation:

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

Mängden av decimaltal kan vi välja att beteckna **D**. Vad jag vet finns ingen standardiserad notation för denna talmängd. Decimaltalen bildar, som vi konstaterat i sats [2], en *äka delmängd* av mängden av rationella tal. Med mängdlärans skrivsätt:

$$\mathbf{D} \subset \mathbb{Q}$$

Dessutom gäller att de rationella talen bildar en äka delmängd av mängden av reella tal:

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Det finns, som sagt, reella tal som inte är rationella, som inte kan uttryckas exakt som ett enda bråk.

Mängden av irrationella tal betecknas ibland **Irr**, men man kan också använda mängdlärans symbolspråk och skriva denna mängd som en mängddifferens:

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

Sammanfattningsvis:

$$\mathbf{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

2.3 Den reella talsymbolen och approximationens principskiss

Från och med det här avsnittet övergår vi till en mer modern och formell förståelse av vad ett 'reellt tal' är för något.

Förutom 'reella tal' kommer vi också att tala om 'reella talsymboler'. Vad är egentligen skillnaden och relationen mellan begreppet om ett *tal* respektive en *talsymbol*? Detta kan vara en mycket fruktbar frågeställning, både i arbetet med att lära sig och komma till en förståelse av matematiken, i matematikundervisning och i filosofin. Vi återkommer till den här frågan i andra sammanhang och litegrann i kommentarerna. Sådär kortfattat skulle jag vilja säga att sambandet är mycket intimt; nämligen, om man förstår ordet symbol på riktigt sätt, och inte bara som en speciell beteckning, som en viss sorts grafisk eller akustisk gestalt.

2.3.1 Reella talsymboler: konstanter respektive variabler

Reella talsymboler faller i två exklusiva huvudkategorier: de är antingen **konstanter**, **konstantsymboler**, eller **variabler**, **variabelsymboler**. Reella variabelsymboler brukar ofta betecknas $a, b, c \dots$ eller $x, y, z \dots$, men i stort sett alla bokstäver ur det latinska eller grekiska alfabetet används. Exempel på reella konstantsymboler som är rationella är 1, 2, $\frac{3}{5}$, -8 och 3.1415926. Exempel på reella konstantsymboler som är irrationella är $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π , talet e och φ , det gyllene snittet "fi". Konstantsymbolerna har ofta speciella, internationellt standardiserade beteckningar. I figur 4 visas en tabell över några reella konstantsymboler, utöver vanliga beteckningssätt för rationella tal.

Väsentliga skillnader mellan en variabelsymbol och en konstantsymbol kan beskrivas på följande sätt. Vad beträffar konstantsymbolen $\sqrt{2}$ är det exempelvis möjligt att säga saker som:

" $\sqrt{2}$ är mindre än 2"

" $\sqrt{2}$ är på ett ungefär 1,41"

" $\sqrt{2}$ är definitivt större än 1"

Däremot finns det inget bråk för vilket man kan säga " $\sqrt{2}$ är precis p q -delar", eftersom kvadratroten ur två är ett icke-rationellt reellt tal. Vad beträffar till exempel tecknen a och b använda som reella variabelsymboler är det möjligt att säga saker som

"*Antag* att a är större än 10"

"*Om* a är större än 2, *så* är a i kvadrat större än 4"

"*För alla* a och b gäller att $a \cdot b = b \cdot a$ (kommutativitet)"

Däremot går det inte att säga vilka värden a och b har eller ungefär har eller till si och så många decimaler — helt enkelt därför att det är variabler och inte konstanter.

Jämför detta med att säga "Antag att en medborgare Alfa är äldre än 18 år gammal. I så fall är det tillåtet att ..., men inte tillåtet att ..." Beteckningen "Alfa" är här helt jämförbar med en talvariabel. Det är förstås inte möjligt att säga hur gammal Alfa är. Man kunde lika gärna ha sagt "Antag istället att Alfa är äldre än 21 år. I så fall ..."

Symboltyp	Exempel
Heltal	$-3 \ -2 \ -1 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3$
Bråk	$\frac{1}{3} \ 4/5 \ -\frac{22}{7}$
Decimaltal	$1,618 \ -5,3 \ 0.00001$
n -Rötter	$\sqrt{2} \ \sqrt{3} \ \sqrt{5} \ \sqrt[3]{10} \ \sqrt[5]{20}$
Potenser	$3^{1/5} \ 19992^{17/280} \ (4/7)^{29/3} \ e^4$
Speciella konstanter	$\pi \ e \ \varphi$
Logaritmvärden	$\log(45344) \ \ln(5e^{10.22})$
Trigonometriska funktionsvärden	$\sin(45^\circ) \ \cos(\pi/3) \ \tan(33^\circ)$
Elementära operationer	$4 + 5\pi \ 6 - \sqrt{2} \ 2\sqrt{5}$

Figur 4: De vanligaste typerna av reella konstantsymboler i matematiken upp till och med inledande kurser på universitetsnivå. Dessa typer av symboler visar sig mycket ofta vara av den icke-rationella arten.

2.3.2 Approximationsprincipen för $\mathbb{R}$

Varje **reellt tal** är inom matematiken accepterad som en talsymbol som antingen:

- (i) *kan uttryckas exakt som ett enda bråk*, eller
- (ii) *entydigt kan approximeras med bråk inom varje given felgräns större än noll (dock inte uttryckas helt exakt som ett enda bråk)*.

I fall (i) gäller talar man om ett **rationellt tal**; detta känner vi igen som standarddefinitionen. I fall (ii) talar man om ett **irrationellt tal**. Man skulle också kunna uttrycka det så att ett irrationellt tal är ett tal som inte *låter sig analyseras på ett ändligt sätt* i formen av ett enda bråk, dock approximeras med bråk. Vad detta med möjligheten av att approximera, felgräns, och så vidare, innebär kommer att förtydligas längre fram i dokumentet.

— Detta faktum om vår matematik är i det här sammanhanget det kanske mest slående exemplet på ett konstaterande beträffande de reella talen, som jag tror att faktiskt alla praktiserande naturvetare och ingenjörer och även (flertalet) matematiker vore fullt beredda att instämma i. Notera att vi i det ovan sagda inte ger en definition av reellt tal, men vi säger något väsentligt eller karakteristiskt beträffande termens användning i matematiken och dess tillämpning på "real world problems".

Den gängse definitionen av ett irrationellt tal är att det är "Ett reellt tal som inte går att uttrycka exakt som ett enda bråk", som alltså inte är rationellt. Det finns inte någon därmed jämförbar allmänt vedertagen definition av ordet 'reellt tal' i sin tur. Ett sätt att med breda penseldrag känneteckna de reella talen vore dock att säga att det är "ett tal som kan approximeras med bråk till vilken noggrannhet som helst, dock så länge felet i närmevärde tillåts vara åtminstone lite större än noll".

Det ligger nära till hands att uppfatta detta som något av ett definitionsförslag. Uppfattat på det viset täcker det nämligen såväl fall (i) som fall (ii). Om talet kan uttryckas exakt som ett enda bråk så är det bästa närmevärdet helt enkelt detta rationella tal och felet i närmevärde är precis hela tiden lika med noll — "approximationen är perfekt" kunde man då säga. Display [4] har påtagliga lingvistiska likheter med den sedvanliga definitionen av rationellt tal i läroböckerna. Dessutom täcker det det vanligaste sättet att göra approximationer till reella tal (i synnerhet i samband med numeriska beräkningar på dator, miniräknare eller annan kalkyla-

tor), vilket är med närmevärden som är decimaltal, som ju utgör en speciell sorts bråk. Men formulering [4] undviker samtidigt den invändning mot att alltför starkt identifiera det reella talet med decimaltalsapproximation, som kunde formuleras såhär: ”Varför just decimalutveckling och inte, till exempel, binärutveckling? Vad är det som är så speciellt med just basen tio?”

Vare sig man uppfattar det som sant ’per definition’ eller ’per axiomatisk reglering’ — eller om man vill se saken på något annat sätt — så är det alltså korrekt att:

[4] *Varje reellt tal låter sig på ett entydigt sätt approximeras med bråk inom varje given felgräns större än noll. Ett reellt tal är i sin tur rationellt om och endast om, det inte bara kan approximeras, utan låter sig uttryckas exakt som ett enda bråk. I annat fall är det reella talet irrationellt.*

Inom matematikens normala huvudfåra är det till och med så att ett tal är reellt *om och endast om* talet uppfyller denna approximationsegenskap. Inom 99,999% (eller något sådant) av all undervisning, tillämpning eller forskning av/inom matematik är detta fullständigt korrekt.⁴ Detta faktum om vår matematik reflekterar en kedja av beslut man fattade inom matematiken och vetenskapen om denna under andra halvan av 1800-talet — en samling *begreppsliga regleringar* med andra ord — och som allt sedan dess är i full kraft. Vi skulle kunna ge den här karakteristiken ett namn och kalla ovanstående kursivering för **approximationsprincipen** för $\mathbb{R}$ (eller **approximationskriteriet** —).⁵

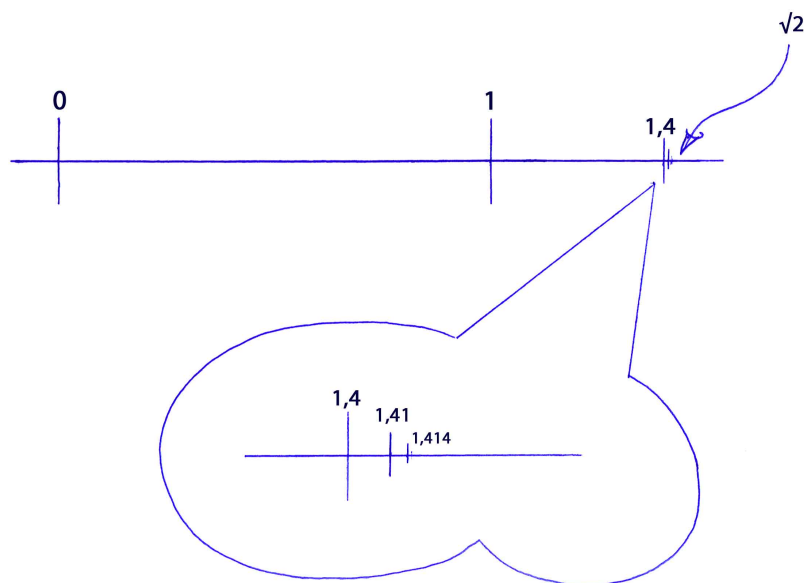
En sorts beskrivning som förekommer i en del läromedel i matematik för högre undervisning är ungefär följande:

”Reella tal är de tal som kan skrivas med en ändlig eller en oändlig följd av decimaler.”

Denna typ av beskrivning skiljer sig radikalt från Newtons och de tidigare citerade encyklopediernas. Man kan säga att den återspeglar en senare koncentration på det beräkningsbara, det ’rent aritmetiska’, i begreppshistorien. Dessutom har den vissa påfallande likheter med en variant på den gängse definitionen av ett rationellt

⁴Undantaget träder bland annat in på grund av introduktionen av det hyperreella talsystemet inom den så kallade icke-standardanalysen. Mer om detta i kommentarerna.

⁵Display [4] har, såvitt jag kan se, karaktären av vad filosofen Wittgenstein skulle ha kallat en *grammatisk anmärkning*. Antag till exempel att vi befann oss i tvivelsmål beträffande huruvida det matematiska objektet π verkligen är möjligt att approximeras entydigt till varje given noggrannhet $\varepsilon > 0$. Det vore i så fall inte helt självklart huruvida vi vore beredda att säga att ”Objektet π är trots allt inte ett reellt tal, fastän vi levde i den övertygelsen” eller ”Det finns reella tal som saknar den önskade egenskapen approximerbarhet med bråk”. Vi rör oss därmed med olika beslut som gäller för en viss term i vetenskapen, i detta fall ’reellt tal’.



Figur 5: Illustration till den allmänna idén att varje reellt tal kan approximeras genom successivt bättre rationella närmevärden (såsom decimaltal), inom varje given noggrannhet $\varepsilon > 0$.

tal. En mer matematiskt precis formulering av den idé som ligger bakom den här vanliga typen av beskrivning, tror jag vore följande: "Ett reellt tal är ett tal som antingen kan uttryckas exakt som ett decimaltal eller som kan approximeras med decimaltal till varje given noggrannhet (med felgränsen ε större än noll)."

Som vi ser ligger genom analogi den första formuleringen av approximationskriteriet för $\mathbb{R}$ nära standarddefinitionen för de rationella talen, och skulle alltså gå att uppfatta som en form av definitionsförslag; dock är det inte strängt taget nödvändigt att uppfatta det så, utan man kan också helt enkelt ta det som *ett grundläggande kriterium* på vad man inom matematiken överhuvudtaget vore beredd att räkna som ett reellt tal och ett krav på varje möjligt försök att ställa upp en teori om de reella talens kalkyl.

Uppfattad som ett grundläggande kriterium på att en matematisk symbol överhuvudtaget utgör, accepteras som, ett reellt tal är [4] jämförbar med det andra vanligt förekommande försöket till inringning:

- [5] *Varje reellt tal kan decimalutvecklas, vilket betyder, approximeras med decimaltal till ett valfritt antal decimaler.*

Underförstått: men ändligt antal decimaler. Denna eller med denna liknande formuleringar förekommer i en del läroböcker.

De två kriterieformuleringarna [4] och [5] är i matematiskt avseende likvärdiga, ekvivalenta: approximerbarhet med bråk implicerar approximerbarhet med decimaltal, och vice versa. Således kan vi kalla även [5] för "approximationskriteriet", utan något behov av att göra åtskillnad.

Den första formuleringen [4] har dock dessa två fördelar jämfört med [5], vad jag kan se:

- (a) [4] uttrycker ingen preferens för just decimalsystemet och decimal approximation, i motsats till exempelvis binär representation och binärutveckling; och
- (b) formulering [4] ligger närmare det gängse sättet att definiera de rationella talen i läroböcker och andra sammanhang: "Ett rationellt tal är ett tal som går att uttrycka som ett bråk, a b -delar."

Approximationsprincipen för $\mathbb{R}$ kan summeras på olika sätt, för att därefter preciseras etappvis. Formuleringarna i [4] och [5] utgör exempel på sådana summeringar och inledande moment i ett dylikt preciseringsarbete. Vi återkommer kort till approximationskriteriet under synpunkten av "Ett försök till definition?" i kommentarerna.

2.3.3 Approximationskriteriet uttryckt i termer av ordningsrelationen

Att ett reellt tal a "på ett entydigt sätt låter sig approximeras med bråk inom varje given felgräns större än noll", är matematiskt helt ekvivalent med ett antal villkor uttryckta i termer av **ordningsrelationen**

$$<$$

vilken vi (som säkert bekant) utläser som "mindre än" respektive "större än".

Låt a vara ett reellt tal. Till att börja med är 'approximerbarheten till varje given noggrannhet' garanterad av följande matematiska faktum, vilket utgör en del av innehållet i sats [6]:

[*] *För varje rationellt tal q gäller precis en av följande relationer:*

$$q < a, \quad q = a \quad \text{eller} \quad q > a$$

För att inse sambandet mellan kriterieformuleringarna kan det vara till hjälp att tänka på följande sätt: på grund av [*] är det alltid möjligt att, för varje givet litet

intervall av rationella tal $[q_1, q_2]$, säga huruvida a ligger i intervallet eller inte.

Entydigheten innebär att man inte ska kunna hamna i strid med ordningsrelationens så kallade linjäritet. Det ska till exempel inte kunna uppstå en situation i vilken $q_1 < a$ och $a < q_2$ men samtidigt $q_1 > q_2$:

[**] Om $q_1 \leq a \leq q_2$ så är $q_1 \leq q_2$, där q_1 och q_2 är rationella.

Ytterligare en del av innehållet i [6]. Detta går på ett ut med att säga att man inte kan finna a inom *disjunkta intervall* på den rationella tallinjen.

Approximerbarheten och dess entydighet kan sammanfattas genom att säga att ordningsrelationen $<$ utvidgad från de rationella talen $\mathbb{Q}$ med ett givet reellt tal a bibehåller sin linjäritet, eller att ordningsrelationen $<$ på $\mathbb{Q} \cup \{a\}$ är *total*. För linjäritet krävs, förutom egenskapen [*], relationens *transitivitet* och *antisymmetri*. Villkoret [**] utgör en bit av transitiviteten.

Linjäriteten gäller över hela den reella talmängden, vilket vi här sammanfattar i formen av en sats:

[6] Ordningsrelationen $<$ utvidgad från de rationella talen till de reella bibehåller sin linjäritet.

I informella termer kan man säga: "Alla reella tal ligger i linje med de rationella talen." Eller: "Alla reella tal kan entydigt ordnas på tallinjen (tallinjen)." Proposition [6] är en specifikation som har intima beröringspunkter med Dedekinds klassiska konstruktion av $\mathbb{R}$ genom snitt.⁶

De regler som är etablerade för de reella talen innebär alltså, att om K är en reell talsymbol är det av principskäl alltid tillåtet att säga saker som:

"Antag att K är större än 1,5."

"Antingen är K mindre än 1,5 eller så är 1,5 mindre än eller lika med K ."

"Om K är större än 1,41 så är K också större än 1,4."

⁶Den allmänna, abstrakta definitionen lyder: En binär relation $\leq$ på en mängd M säges vara en **linjär ordningsrelation** (eller **total** –) om, för alla $a, b, c \in M$, gäller:

- (i) $a \leq b$ eller $b \leq a$ (totalitet)
- (ii) Om $a \leq b$ och $b \leq a$ så är $a = b$ (antisymmetri)
- (iii) Om $a \leq b$ och $b \leq c$ så $a \leq c$ (transitivitet)

M säges vara en **linjärt ordnad mängd** under relationen $\leq$. Den till $\leq$ hörande **strikt ordningsrelationen** $<$ definieras som så att $a < b$ om $a \leq b$ men $a \neq b$.

”Om K vore större än 1,618, så kan K förstås inte också vara *mindre* än 1,6.”

Ordningsrelationen erbjuder alltså en väg till etappvis precisering av approximationskriteriet.

2.3.4 Notation för approximation, närmevärden och felgränser till reella tal

Vi ska i det här avsnittet införa några uttryckssätt och skrivsätt som kan underlätta och tydliggöra beskrivningen av de praktiska reglerna för reella tal.

Till att börja med kan det visa sig nyttigt att använda stor bokstav, exempelvis

$$K$$

eventuellt försedd med index $K_1, K_2, K_3, \dots$, som allmän beteckning för tal, osagt av vilken typ (om det är rationella, reella, komplexa, etc). Istället för *ett tal* kan vi också tala om K som en *talsymbol*, *matematisk kvantitet*, *kvantitativ matematisk symbol*, med mera. Vi behandlar i detta sammanhang dessa ord mer eller mindre som utbytbara, utan att framhäva några distinktioner.

Det vanliga i matematiken är att **felgräns**, **noggrannhet**, **finhet**, **osäkerhet** betecknas med den grekiska bokstaven lilla epsilon

$$\varepsilon$$

Vi låter det alltid vara underförstått att felgränsen ε betecknar ett *icke-negativt rationellt tal*. Med mängdlärans skrivsätt ” $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ och $\varepsilon \geq 0$ ” eller ” $\varepsilon \in \mathbb{Q}^{\geq 0}$ ”. Ibland behöver det understrykas att felgränsen inte kan vara exakt noll. Det gör man ofta genom att kort och gott skriva ” $\varepsilon > 0$ ”.⁷

Med en **feluppskattning** menas (att ange) ett intervall av rationella tal inom vilket talet K kan uppskattas, ligger, kan placeras. Eller som man också skulle

⁷Man skiljer i numerisk analys mellan felgränsen ε och ”det absoluta” felet i ett närmevärde. Felgränsen är en gräns för hur stort felet i approximationen kan vara, medan felet anger hur stort felet i approximationen ”verkligen är”. Om x_0 är ett närmevärde till det reella talet x så är **(det absoluta) felet** i approximationen teoretiskt definierat som differensen Δx mellan x och x_0 :

$$\Delta x = x - x_0$$

Om $\varepsilon > 0$ är en felgräns för approximationen, så gäller alltså per definition att $\Delta x \leq \varepsilon$.

Det relativa felet (ofta uttryckt i procent) är kvoten $\Delta x/x$.

säga, inom vilket 'det exakta' eller 'egentliga' värdet ligger. Om man vet att K uppskattas till någonstans mellan de rationella talen q_1 och q_2 , så är ett sätt att uttrycka denna information kortfattat att skriva

$$q_1 \leq K \leq q_2$$

Beteckningssättet utläses: " q_1 är mindre än eller lika med K som är mindre än eller lika med q_2 ." Ett alternativ är att utnyttja notationen för intervall och skriva

$$K \in [q_1, q_2]$$

Det står: " K ligger i intervallet från q_1 till q_2 ." Det rationella talet q_1 säges vara en **nedre gräns** för K och q_2 en **övre gräns** för eller till K .

Vi säger att en feluppskattning till K är **finare (grövre)** än en annan om intervallbredden $|q_2 - q_1|$ i den förra approximationen är mindre (större) än motsvarande avstånd i den senare.

Om det rationella talet q är ett **närmevärde** till, en **approximation** av K med noggrannheten $\varepsilon > 0$ är ett av sätten man skriver detta som

$$K = q \pm \varepsilon$$

Skrivsättet förekommer i en del läroböcker i analys och speciellt i samband med matematisk felspridningsanalys. Påståendet kan utläsas på ett antal olika sätt, som alla är synonyma:

$$K = q \pm \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow$$

" K är lika med q plus/minus ε "

q är ett närmevärde till K inom felgränsen ε

q är ett närmevärde till K med noggrannheten ε

K ligger inom ett avstånd av ε från q

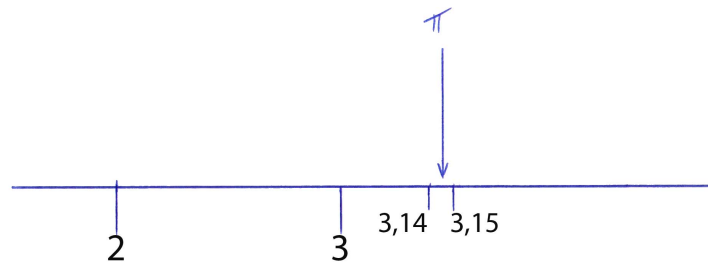
En approximation till K med noggrannheten ε är q

Och så vidare. Istället för $K = q \pm \varepsilon$ kan vi också använda olikhetsrelationen $<$ och skriva

$$q - \varepsilon \leq K \leq q + \varepsilon$$

vilket uppfattas som synonymt. Intervallet $[q - \varepsilon, q + \varepsilon]$ är med andra ord en feluppskattning till K om och endast om $K = q \pm \varepsilon$.

Anmärkning. Skrivsättet $K = q \pm \varepsilon$ är analogt med det normala mönstret för att uppge felgränser vid mätning av storheter inom naturvetenskaperna och ingenjörskonsten. Jag påminner dock om att K inte syftar på någon fysikalisk storhet, och därför finns inga empiriska enheter inblandade (såsom kg eller °C). Skrivsättet $K = q \pm \varepsilon$ ska inte förväxlas med det sätt på vilket man till exempel kan ange de två exakta lösningarna till andragradsekvationen $x^2 - x - 1 = 0$ som $x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Man kan använda båda dessa skrivsätt om så är lämpligt och låta det framgå av sammanhanget vilken användning som avses. $\square$



Figur 6: Talet π ligger någonstans mellan 3,14 och 3,15.

Exempel 5. Talet π till två decimaler i dess decimalutveckling är 3,14. Det innebär att vi har följande feluppskattning (1):

$$3,14 < \pi < 3,15$$

I figur 6 är intervallet $[3.14, 3.15]$ utritat på en tallinje. Talet 3,14 utgör en nedre gräns och 3,15 en övre gräns till π . Det gäller också att (2):

$$\pi = 3,1 \pm 0,1$$

Här är $K = \pi$, $q = 3,1$ och $\varepsilon = 0,1$. Ett annat närmevärde till π baserad på informationen i olikhet (1) är (3):

$$\pi = 3,145 \pm 0,005$$

Närmevärdet 3,145 är mittpunkten (medelvärde) på intervallet $[3.14, 3.15]$. $\square$

Ett närmevärde till K är **finare (grövre)** än ett annat närmevärde om felgränsen i den förra approximationen är mindre (större) än felgränsen i den senare. I exemplet är approximation (3) finare än (2), eftersom $0,005 < 0,1$. En ännu finare

approximation av π jämfört med ovanstående vore

$$\pi = 3,14159 \pm 0,00001$$

Det här närmevärdet har fler decimaler och det mindre felet $\varepsilon = 0,00001 < 0,005$. Eftersom detta närmevärde dessutom är den bästa decimala approximationen av π till fem decimaler ligger π inom feluppskattningen

$$3,14159 < \pi < 3,14160$$

Detta är för många praktiska beräkningar fullt tillräckligt som approximation.

Om den undre felgränsen ε_1 och den övre felgränsen ε_2 i en approximation ligger på olika avstånd från närmevärdet q kan ett sätt att få med den informationen vara att skriva:

$$q - \varepsilon_1 \leq K \leq q + \varepsilon_2$$

Exempel 6. Talet $\sqrt{2}$ till fyra decimaler är 1,4142. Således kan vi skriva

$$1,4142 - 0 < \sqrt{2} < 1,4142 + 0,0001$$

Här är $q = 1,4142$, $\varepsilon_1 = 0$ och $\varepsilon_2 = 0,0001$. $\square$

2.3.5 Tre skilda begrepp: decimaltal, decimalutveckling, reellt tal

Det vanligaste är att som en approximation till ett givet reellt tal välja (beräkna) ett närmevärde av typen decimaltal. Skälen till att man använder just decimaltal, som har basen tio, är förmodligen av mest historisk art kombinerat med det naturfaktum att 'människan' har tio fingrar och tio tår. Metoder för decimalapproximation inträder först efter decimalsystemets etablering på den europeiska scenen under sen medeltid och renässans.

Exempel 7. Några exempel på decimala närmevärden till reella tal:

$$\frac{1}{3} = 0,333\dots$$

$$\sqrt{2} = 1,414\dots$$

$$\pi = 3,14159265358979\dots$$

$\square$

De tre prickarna "...” efter strängen av siffror kan utläsas ”och så vidare”. Det som står är inte att talsymbolen $\sqrt{2}$ i vänsterledet liksom är lika med en 1:a följd av siffror efter decimalkommat, som fortsätter förbi och utanför pappret i all oändlighet. Prickarna betyder här bara att decimaltalet i högerledet av likhetspåståendet är ett närmevärde, en approximation, av det reella talet i vänsterledet. Likheten är inte exakt, utan approximativ.

Dessutom signalerar likhetstecknet och punkterna att det decimaltal som står i högerledet är *den bästa möjliga approximationen* av det reella talet, med innebörden att det är det största decimaltal med just så många decimaler efter decimalkommat, som fortfarande är mindre än eller lika med det reella talet. Det bästa närmevärdet till 'en tredjedel' i formen av ett decimaltal med tre decimaler efter decimalkommat, och som är mindre än eller lika med en tredjedel, är just 0,333; detta eftersom

$$3 \cdot 0,333 = 0,999 < 1 < 1,002 = 3 \cdot 0,334$$

De fjorton första decimalerna i decimalutvecklingen av π framgår av ovanstående exempel.

Alternativa sätt att utläsa samma påståenden som ovan, och som kan undanröja eventuell förvirring över skrivsättet, vore exempelvis dessa:

$$\sqrt{2} = 1,414\dots$$

$$\Leftrightarrow$$

”Roten ur två är lika med 1,414 och så vidare”

Kvadratroten ur två beräknat till tre decimaler är 1,414

Decimalutvecklingen av roten ur två till tre decimaler är 1,414

Decimaltalsapproximationen av roten ur två till tre decimaler är 1,414

Approximationen av talet $\sqrt{2}$ med en följd av decimaltal har det bästa närmevärdet 1,414 till tre decimaler.

Decimalsummeföljden till $\sqrt{2}$ har det fjärde elementet 1,414.

Den oändliga följd av bättre och bättre approximationer till ett givet (positivt) reellt tal, i formen av just decimaltal vars belopp är mindre än eller lika med det reella talet, kallas för det talets **decimalutveckling**.

Var uppmärksam på skillnaden mellan begreppen *decimaltal* respektive *decimalutveckling*. Ett decimaltal är en viss typ av rationellt tal. En decimalutveckling

uppfattar man i matematikvetenskapen som en *oändlig talföljd*, vilket är en helt annan sorts 'matematiskt objekt' än ett enskilt tal. Närmare bestämt utgör decimalutvecklingen en **decimalsummeföljd** $\{D_n\}_{n=0}^{\infty}$ (utläses: "Följden D_n där n går från noll till oändligheten"). För att göra det här tydligare låt oss återigen titta på exemplet $1/3$.

Exempel 8. Decimalutvecklingen $\{D_n\}$ till bråket $1/3$ är den här talföljden:

$$\begin{aligned} D_0 &= 0 \\ D_1 &= 0, 3 \\ D_2 &= 0, 33 \\ D_3 &= 0, 333 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Den fortsätter på samma sätt utan något givet slut. Elementet D_0 är den bästa approximationen av $1/3$ upp till heltal mindre än eller lika med $1/3$ -del. Elementet D_1 är den bästa approximationen av $1/3$ upp till ett decimaltal som är mindre än eller lika med $1/3$ med exakt en decimal efter decimalkommat. Och så vidare. $\square$

Ett reellt tal som kan uttryckas exakt som ett enda decimaltal säges ha en **ändlig decimalutveckling**.

Exempel 9. Här är några reella tal med ändlig decimalutveckling:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= 0, 5; & \frac{1}{4} &= 0, 25; & \frac{1}{5} &= 0, 2 \\ \sqrt{1} &= 1; & \sqrt{4} &= 2; & \sqrt{9} &= 3 \end{aligned}$$

För att signalera att decimalutvecklingen är ändlig använder man ibland skrivsättet:

$$\frac{1}{4} = 0, 25000 \dots$$

De tre 0:orna åtföljda av de tre prickarna "... " signalerar i detta fall, att likheten $1/4 = 0, 25$ är exakt, till skillnad (observera!) från föregående exempel. Bruket av tre prickar efter decimalkommat har här en annan innebörd, nämligen att följderna av decimaler fortsätter enligt samma mönster, en upprepning av 0:or. $\square$

Ett reellt tal som inte kan uttryckas exakt som ett enda decimaltal säges ha en **oändlig decimalutveckling**. Ett reellt tal kan ha en oändlig decimalutveckling av *två helt olika anledningar*. Antingen beror det på att talet är ett bråk som inte

kan uttryckas exakt som ett decimaltal, såsom $1/3$ eller $22/7$. Eller så beror det på att det reella talet är irrationellt, såsom $\sqrt{2}$ eller π .

Den slutsats vi drar av detta är värd att understryka, eftersom den undanröjer ett vanligt missförstånd:

[7] *Varje irrationellt tal har en oändlig decimalutveckling. Däremot gäller inte det omvända: inte varje tal som har en oändlig decimalutveckling är irrationellt.*

Varje bråk (och alltså varje rationellt tal) har däremot en **periodisk** decimalutveckling; här finns en avgörande skillnad. Det betyder att någonstans övergår decimalutvecklingen i en oändlig upprepning av en sekvens siffror (eventuellt "000..."). Detta är unikt för de rationella talen. En periodisk decimalutveckling implicerar alltid ett rationellt tal.⁸

Den oändliga decimalutvecklingen till ett bråk som inte går att uttrycka exakt som ett decimaltal kan man bestämma genom att använda någon uppställning för divisionsalgoritmen, till exempel kortdivision eller liggande stolen.

Problem 1. Decimalutveckla talet $1/7$.

Lösning: Med liggande stolen (se figur 7) får jag att

$$1/7 = 0,142857142857142857\dots$$

Upprepning av perioden sker första gången man erhåller samma rest som vid något tidigare steg i proceduren (se figur 7). Perioden är som vi ser "142857" och inleds direkt efter decimalkommat. Periodlängden är 6 siffror. Problemet är löst. $\square$

Decimalutvecklingen av $1/7$ kan också skrivas

$$1/7 = 0, [142857]$$

Sambandet mellan de rationella talen och periodiska decimalutvecklingar är också värt att understryka:

[8] *Ett reellt tal är rationellt om och endast om det har en periodisk decimalutveckling.*

Sammanfattning: Ett reellt tal är alltså en typ av tal som kan approximeras med decimaltal till varje given noggrannhet, alltså inom varje felgräns större än noll.

⁸En förklaring till periodiciteten går vi igenom i detalj i dokumentet *Algoritmer för de fyra räknesätten* ur del I av "Den första matematiken".

$$\begin{array}{r}
 0,14285714\dots \\
 \hline
 1 \quad \boxed{7} \\
 - 0 \\
 \hline
 10 \\
 - 7 \\
 \hline
 30 \\
 - 28 \\
 \hline
 20 \\
 - 14 \\
 \hline
 60 \\
 - 56 \\
 \hline
 40 \\
 - 35 \\
 \hline
 50 \\
 - 49 \\
 \hline
 10 \quad \swarrow \text{Samma rest} \\
 - 7 \\
 \hline
 30 \\
 - 28 \\
 \hline
 2
 \end{array}$$

Figur 7: Beräkning av $1/7$ genom liggande stolen. Efter 6 steg i uppställningen återkommer resten 1 (eller 10), så därefter upprepar sig helt enkelt decimalutvecklingen av $1/7$.

Den oändliga följderna av bästa approximationer som decimaltal med 0, 1, 2, 3, ... decimaler efter decimalkommat kallas för det reella talets decimalutveckling. Decimalutvecklingen är unik om man utesluter följder som någonstans övergår i en oändlig upprepning av 9:or.

Den så kallade decimalutvecklingen $\{D_n\}$ till ett givet positivt reellt tal a är bestämd av villkoret att decimaltal nummer n i den oändliga följderna av närmevärden är det största decimaltal D_n med n decimaler efter decimalkommat som fortfarande är mindre än eller lika med a .

2.3.6 Storheter jämfört med matematiska talsymboler

Var uppmärksam på skillnader och samband mellan det naturvetenskapliga (fysikaliska) begreppet storhet (eng. *physical quantity*) och matematikens begrepp tal (eng. *number*). En *storhet* är något som kan mätas (eller som man åtminstone tänker, föreställer sig som mätbart), och därvid uppges **mätetal**, **enhet** och **felgräns**. Mätetalet i sin tur är, uttrycks genom någon matematisk talsymbol.

En *matematisk talsymbol* har aldrig någonsin någon enhet eller dimension. Mätetalet för en storhet är visserligen ett tal, men ett tal har i sig självt inte någon enhet, såsom kilogram, meter eller sekund. (Härmed sammanhänger den newtonsk-cartesianska konceptionen om ett tal som ett abstraherat storleksförhållande.) Exempel på talsymboler är

$$2, \frac{5}{8}, 1.618, \sqrt{2}, \pi$$

alltså talet två, talet fem åttondelar, talet ett komma sexhundraarton, talet kvadratroten ur två samt talet pi.

I matematiken talar man inte om att ”mäta” en rent matematisk kvantitet — såsom storleksförhållandet mellan diagonalen och sidan i en kvadrat eller en aritmetisk-algebraisk talsymbol såsom talet e — utan man säger att man antingen *bestämmer* kvantiteten exakt eller så *approximerar* man den genom att beräkna ett visst *närmevärde* till den *inom felgränsen*, *med felet*, *med noggrannheten* ϵ och så eller med ϵ och så många decimaler. Talet är så att säga *mättet* och inte *det mätta*.

Exempel 10. Storleksförhållandet mellan omkretsen och sidan i en kvadrat är exakt 4:1 — det är inte en approximation. Storleksförhållandet mellan diagonalen och sidan i kvadraten däremot kan inte uttryckas exakt som ett enda bråk. En mycket grov approximation av storleksförhållandet är 3:2. Det betyder att diagonalen är cirka 3 halvor (2-delar) av sidan. Storleksförhållandet mellan omkretsen

och diametern i en cirkel kan approximeras med närmevärdet 3,14 till två decimaler. Omkretsen är på ett ungefär lika lång som diametern tagen 3,14 gånger. $\square$

Avsaknaden av fysikaliska enheter för matematiska talsymboler är en *fundamental skillnad* mellan fysikaliska storheter och dessa matematikens tal. Men en *viktig likhet* mellan fysikaliska storheter och matematikens reella tal är förekomsten av och den absoluta relevansen av *feluppskattning*. En skillnad återigen är att 'felgränsen' i fallet med fysikens storheter handlar om att man gör *empiriska mätningar i laboratorier*, och därför får in ett element av osäkerhet, medan 'felgränsen hos ett närmevärde' till ett reellt tal är något som *beräknas* på papper eller med en dator och uppskattas genom *matematiska* resonemang och inte naturvetenskapliga. I matematikens fall handlar det inte om någon *empirisk* osäkerhet — inte ens när man räknar fel av misstag! Detta är ett exempel på *logiska-begreppsliga skillnader* mellan matematik och naturvetenskap såsom mänskliga verksamheter.

Feluppskattning inom naturvetenskaperna hör till ett område som kallas *felanalys*, och ingår som ett kursmoment i varje utbildning till ingenjör eller fysiker. Feluppskattning i matematiken hör till områden som *approximationsteori* och *numerisk analys*.

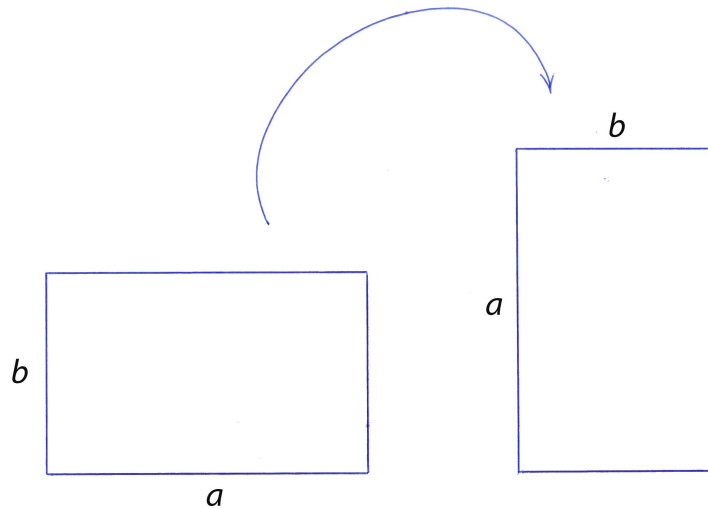
2.4 Reell aritmetik: praktiska beräkningar med irrationella tal

2.4.1 Arvsprincipen för $\mathbb{R}$: räknelagar och ordningsegenskaper

Det som, som sagt, gör de reella talen till ett i jämförelse med de rationella talen vidare talbegrepp än det rationella är att man nu också har *tillgång till ett nytt språk* för att handskas med inkommensurabla storheter och abstraherade kvantiteter såsom $\sqrt{2}$ och π . Man kan kalkylera med dessa som man gör med rationella tal: addera, subtrahera, multiplicera, dividera, med mera. Men vad det innebär att 'kalkylera med irrationella tal' behöver förtydligas. Det är inte *självl klart* vad det betyder, bara därför att vi vet vad det innebär att räkna med heltal, bråk och decimaltal.

I utvidgningen av talbegreppet från rationella tal till reella tal, vilka alltså också innefattar irrationella talsymboler, ville man behålla de relationer som framträder vid den geometriska analysen av storleksförhållanden mellan sträckor, rektanglar, rätblock och andra geometriska storheter. Det gäller nu till exempel att arean av

en plan rektangel lämnas oförändrad om man byter plats på längden och bredden i den, det vill säga vrider den ett kvarts varv. Detta ger den specifikt *geometrisk* bakgrunden och motiveringen av kommutativitet för det allmännare reella talbegreppet (se följande exempel).



Figur 8: En rektangel som vrids 90° och ställs på högkant. Arean påverkas inte av denna operation: b stycken rader med a enhetskvadrater i varje rad ger lika mycket som a stycken rader med b enhetskvadrater i varje rad. Detta ger den geometriska motiveringen av kommutativitet för de reella talen.

Genom att således betrakta relationer mellan sträckor på en linje, arearelationer mellan rektanglar och volymrelationer mellan rätblock, på ett sätt som är jämförbart med analysen av de positiva heltalens och bråkens egenskaper i rationell aritmetik, motiveras räknelagarna och olika ordningsegenskaper för de reella talen. Dessa är de egenskaper som man vid första påseendet ville behålla vid övergången till ett i jämförelse med heltalen och bråken vidare talbegrepp. Man låter de reella talen så att säga ärva motsvarande egenskaper hos de rationella talen.

De 'kontinuerliga' bildmässiga framställningarna i formerna av vanliga sträckor, rektanglar och rätblock, kan fattas i en vidare bemärkelse, där enhetssträckan, enhetskvadraten respektive enhetskuben tas som *symboliska bilder av, referenspunkter för den delbara helheten*. Rektangeln som ett bildmässigt diagram för bråkmultiplikation är till exempel i sig själv inte en del av det fält av traditionell matematik som kallas geometri, även om kopplingen till geometrin och areaformlerna är transparent. I det fall man bara har att göra med positiva heltal går det också bra att överblicka sambanden med hjälp av ”**punkttanglar**”, alltså scheman av punkter på pappret eller i den exakta fantasin (till exempel i formen av en rektangel), eller liknande diskreta diagram i två eller tre dimensioner, genom att tänka i termer av

antalet punkter de innehåller. Varje punkt representerar då ett av de objekt som räknas (vare sig det är äpplen, kronor, får, hästar, eller något annat). Vad gäller räknelagarna för bråk går det också bra att utnyttja vanliga **bråkdiagram**.

Dessa resonemang föranleder en central regel för varje möjlig framställning av eller teori för kalkylen med reella tal, som vi kan kalla **arvsprincipen** för $\mathbb{R}$ (eller **arvskriteriet** –).

De positiva reella talen uppfyller åtminstone de räknelagar och ordnings-egenskaper som framträder vid den klassiska geometriska analysen av förhållanden mellan sträckor eller mellan areor och volymer av geometriskt enkla figurer, såsom rektanglar och rätblock.

I termer av utvidgningen från de rationella talen $\mathbb{Q}$ kan arvsprincipen uttryckas såhär:

[9] *De reella talen uppfyller åtminstone samma fundamentala räknelagar och ordningsegenskaper som de rationella talen.*

Det är: kommutativitet, distributivitet, associativitet och så vidare. Om man är osäker vad som gäller för de reella talen är det oftast bara att tänka efter vad som gäller för de *rationella* talen.

Exempel 11. (a) Är $a \cdot b = b \cdot a$ även för reella tal? Svar: eftersom multiplikation med rationella tal är kommutativ följer ur arvsprincipen [9] att även multiplikation med reella tal är det.

(b) Finns det ett reellt tal a sådant att $a = 1/\sqrt{2}$? Svar: eftersom inversen till varje rationellt tal (förutom 0) existerar följer ur arvsprincipen att det reella talet a gör det också.

(c) Givet två reella tal a och b tillåter oss arvsprincipen att omedelbart konstatera att minst en men också högst en av följande relationer gäller:

$$a < b \quad a = b \quad a > b$$

(d) För rationella tal gäller att om $a < b$ och $c > 0$ (c är ett positivt tal) så är $ca < cb$, och samma sak gäller därför de reella talen. $\square$

Ordningsrelationen går alltså också att greppa i geometriska termer. Ur den geometriska ståndpunkten speglas ordningsegenskaperna i relationer mellan räta sträckor (linjesegment). Jämför med punkterna (c) och (d) ur ovanstående exempel: (c) motsvaras av att givet två sträckor är de antingen lika långa eller så är den ena

åtminstone lite längre än den andra; (d) motsvaras av det geometriska faktum att om en sträcka a är kortare än sträckan b så kommer denna relation att bevaras vid förlängning/förkortning av sträckorna.

En del av de ordningsegenskaper man 'kräver' att de reella talen ska ärva (såsom (c)) har vi redan bekantat oss med i anslutning till approximationsprincipen, nämligen omformulerad i termer av linjäriteten hos den utvidgade ordningsrelationen $<$. Anledningen till att jag lyfte ut dessa för sig är att de har en sorts begreppslik särställning, genom sin anknytning till approximationsprincipen som den allmänna konceptionen om de reella talens approximerbarhet och ordning visavi den rationella tallinjen. Detta är den underliggande konceptionen för samtliga mängdteoretiska konstruktioner av $\mathbb{R}$.

Det finns nu olika sätt att närma sig räknelagarna och ordningsegenskaperna inom den matematiska undersökningen av reella tal. Den geometriska bakgrunden är bara ett sätt att se på dem — dock ett mycket viktigt perspektiv, som inte kan utelämnas. Man kan också närma sig de matematiska egenskaperna hos de reella talen genom någon formell, algebraisk teori, på vilket exempel vore de axiomatiska representationer och så kallade mängdteoretiska konstruktioner som läggs fram under 1800-talet.

Ett alternativ jag ser framför mig utgår helt enkelt från en beskrivning av befintlig praxis av att operera med 'reella tal' som *en viss kategori av matematiska symboler och symboliska scheman*, där inget behov alls uppträder av att blanda in mängdlära och således av 'konstruera' de reella talen som olika slags komplicerade 'mängder'. Man kan säga att denna approach ligger närmare den sedvanliga algebraiska karakteriseringen av de reella talen, men följer ändå en lite egen väg. En härledning av till exempel den kommutativa lagen utifrån denna typ av premisser som exempelvis approximationskriteriet utgör skulle skissningsvis kunna se ut såhär:

1. Antag att a och b är reella tal och att felgränsen $\varepsilon > 0$ är ett godtyckligt rationellt tal. Vi behöver visa att produkterna ab och ba är oskiljaktiga inom den givna felgränsen.
2. Enligt approximationskriteriet [9] kan $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ och $\varepsilon' > 0$ väljas sådana att:

$$a = q_1 \pm \varepsilon'$$

$$b = q_2 \pm \varepsilon'$$

$$ab = q_1q_2 \pm \varepsilon^\times, \text{ där } \varepsilon^\times = \varepsilon^\times(q_1, q_2, \varepsilon') \text{ är feluppskattningen för approximationen } q_1q_2 \text{ av } ab$$

$$\varepsilon^\times \leq \varepsilon$$

3. Ur (2) får vi att $ab = q_1q_2 \pm \varepsilon$. Men för varje möjlig approximation av ab får vi en

approximation av ba inom samma felgräns, och vice versa: alltså $ba = q_2q_1 \pm \varepsilon$.

4. Följaktligen är symbolerna ab och ba oskiljaktiga upp till ε ; men eftersom ε var godtyckligt är produkterna oskiljaktiga upp till bråk generellt.

5. Ur (4) och identitetskriteriet för $\mathbb{R}$ drar vi slutsatsen att $ab = ba$. $\square$

Detta är alltså en principskiss för att visa kommutativiteten för multiplikation i $\mathbb{R}$.

Med hjälp av räknelagarna kan olika allmänna (algebraiska) samband konstateras och dessutom ger räknelagarna och ordningsegenskaperna ett säkerhetsbälte i arbetet med att bemästra ekvationer.

Exempel 12. Låt oss för att illustrera titta på den "räknelag" som kallas för **kvadreringsregeln**:

[10] För alla reella tal a och b :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Det typiska beviset för kvadreringsregeln med utgångspunkt i räknelagarna går såhär:

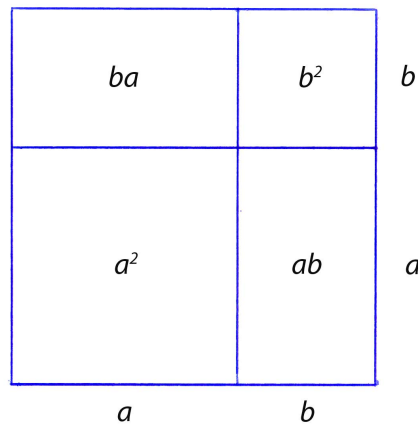
$(a + b)^2$	$= (a + b)(a + b)$	definition av upphöjt till 2
	$= a(a + b) + b(a + b)$	distributiva lagen
	$= a^2 + ab + ba + b^2$	distributivitet igen
	$= a^2 + 2ab + b^2$	kommutativa lagen

Beviset är klart. En alternativ förklaring, bevisliknande resonemang, till kvadreringsregeln är geometriskt och åskådligt. Det framgår av figur 9. $\square$

Däremot finns det egenskaper som talsystemet $\mathbb{R}$ har eller tillskrivs, som inte $\mathbb{Q}$ också uppfyller: i annat fall hade det inte funnits någon anledning av införa de reella talen från första början. Arvsprincipen utsäger bara att de reella talen uppfyller *åtminstone* samma räknelagar och ordningsegenskaper som de rationella, men inte att de reella talen inte skulle kunna ha ytterligare egenskaper. En av dessa skiljande egenskaper är (förstås) att varje positivt tal har/tilldelas en kvadratrots, vilket bara i yttersta undantagsfall gäller inom de rationella talen.

2.4.2 Utvidgningsprincipen för $\mathbb{R}$ och de fyra räknesätten

Låt oss nu titta på följande *fråga 1*:



Figur 9: En geometrisk förklaring till kvadreringsregeln. Kvadraten på sträckan $(a + b)$ är precis lika stor som kvadraten på sträckan a , kvadraten på b och två rektanglar ab tillsammans.

”Hur gör man för att *faktiskt beräkna värdet* av till exempel en summa eller en produkt där minst en term respektive faktor är ett irrationellt tal?”

För att förklara den praktiska princip som besvarar den här frågan låt oss titta på följande två problem:

Problem 2. Beräkna summan $7 + \sqrt{5}$ till en noggrannhet av tre korrekta decimaler.

Lösning: Vid numerisk beräkning av uttrycket $7 + \sqrt{5}$ gör man så att man approximerar det irrationella talet $\sqrt{5}$ till sådan noggrannhet att den rationella summan av detta närmevärde till $\sqrt{5}$ och talet 7 ligger inom ett önskat intervall av rationella tal.

1. $\sqrt{5}$ till tre korrekta decimaler är 2,236. Alltså är

$$2,236 < \sqrt{5} < 2,237$$

(Att $\sqrt{5}$ är strikt större än 2,236 följer av att $2,236^2 = 4,999696$, men också av att denna kvadratroten är irrationell.)

2. Om vi adderar 7 till alla leden i olikheterna i (1) får vi att

$$7 + 2,236 < 7 + \sqrt{5} < 7 + 2,237$$

$$9,236 < 7 + \sqrt{5} < 9,237$$

3. Ur rad (2) drar vi slutsatsen att värdet av summan till tre korrekta decimaler är

$$7 + \sqrt{5} = 9,236\dots$$

Beräkningen är klar. $\square$

Problem 3. Beräkna produkten $5 \cdot \sqrt{3}$ till en noggrannhet av fyra korrekta decimaler.

Lösning: Vid numerisk beräkning av ett uttryck såsom $5\sqrt{3}$ gör man på i princip samma sätt som med summan i föregående problem: man approximerar det irrationella talet $\sqrt{3}$ till sådan noggrannhet att produkten av detta närmevärde och talet 5 ligger inom ett önskat maximalt avstånd från produkten; feluppskattningen görs på sedvanligt sätt med rationella tal.

1. $\sqrt{3}$ till fem korrekta decimaler (för att få lite marginal) är

$$1,73205 < \sqrt{3} < 1,73206$$

2. Alltså är

$$\begin{aligned} 5 \cdot 1,73205 &< 5\sqrt{3} < 5 \cdot 1,73206 \\ 8,66025 &< 5\sqrt{3} < 8,66030 \end{aligned}$$

3. Ur (2) drar vi slutsatsen att produkten $5\sqrt{3}$ till fyra korrekta decimaler är

$$5\sqrt{3} = 8,6602\dots$$

Beräkningen är klar.

4. Vi kan även göra en kontrollräkning:

$$\begin{aligned} (5\sqrt{3})^2 &= 5^2(\sqrt{3})^2 = 25 \cdot 3 = 75 \\ 8,6602^2 &= 74,99906404 \end{aligned}$$

Som vi ser är högerleden mycket nära varandra. $\square$

Feluppskattningen vid beräkning med reella tal görs med andra ord *som om det handlade om att bestämma felgränser vid beräkningar med mätvärden till fysikaliska storheter*. Det är alltså inte sagt att beräkningar med reella tal är detsamma som fysikaliska beräkningar, utan att det finns påtagliga analogier. Dessa felberäk-

ningar, oavsett om de utförs för hand (*manuellt*) eller med en dator (*maskinellt*), återförs i slutändan alltid på helt vanlig rationell aritmetik: beräkningar med rationella tal. Baserat på hur man på det här sättet i praktiken går till väga vid faktiska beräkningar med reella tal, kan vi formulera en generell princip för varje utvidgning av en operation, som åtminstone är (kontinuerligt) definierad för rationella tal.

Låt oss härmed använda

★

som en variabelsymbol för något av de fyra räknesätten $+$, $-$, $\cdot$, $/$ eller någon annan operation som är kontinuerligt definierad för rationella tal. Den allmänna principen kan vi kalla **utvidgningsprincipen** för $\mathbb{R}$ (eller **utvidgningskriteriet** ⁹):

[11] *Låt a och b vara reella tal. Om $a = q_a \pm \varepsilon_a$ och $b = q_b \pm \varepsilon_b$, så är $q_a \star q_b$ ett närmevärde till $a \star b$ inom felgränsen ε^* (eller felgränserna $\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*$). Felgränsen ε^* är en funktion av approximationerna till a och b och dessutom gäller att denna går mot noll då felgränserna ε_a och ε_b i närmevärden går mot noll.*

Antag exempelvis att operationen $\star$ är addition ($\star = +$). Då är

$$\varepsilon^+ = \varepsilon_a + \varepsilon_b$$

Detta inses baserat på en analys av värsta-fall-scenario för approximationen $q_a + q_b$ till det reella talet $a + b$; helt i analogi med motsvarande värsta-fall-analys för summan av två fysikaliska mätvärden med givna felgränser.

Ovanstående två problem utgör alltså konkreta exempel på användning av utvidgningsprincipen. Låt oss titta på två ytterligare exempel:

Problem 4. Enligt uppgift är det reella talet $a = 3,6 \pm 0,2$ och $b = 17,2 \pm 0,1$. Beräkna: (a) $a + b$ (b) $a - b$ (c) $a \cdot b$

Lösning: (a) $a + b = (3,6 \pm 0,2) + (17,2 \pm 0,1) = (20,8 \pm 0,3)$

I detta fall är operationen $\star = +$ och $\varepsilon^+ = \varepsilon_a + \varepsilon_b = 0,2 + 0,1 = 0,3$.

(b) $a - b = (3,6 \pm 0,2) - (17,2 \pm 0,1) = -13,6 \pm 0,3$

Felgränsen $\varepsilon^- = \varepsilon^+ = 0,3$.

(c) 1. $q = 3,6 \cdot 17,2 = 61,92 \approx 61,9$ är ett närmevärde till ab inom ett visst felintervall. Låt oss försöka bestämma detta intervall.

⁹För att understryka att ε^* är en funktion av a , b , ε_a såväl som ε_b vore ett för matematisk analys typiskt skrivsätt $\varepsilon^* = \varepsilon^*(a, b, \varepsilon_a, \varepsilon_b)$.

2. Det minsta möjliga värde som ab kan ha givet informationen om närmevärdena till a och b är

$$(3,6 - 0,2) \cdot (17,2 - 0,1) = 3,4 \cdot 17,1 = 58,14$$

3. Det största möjliga värde ab kan ha är

$$(3,6 + 0,2) \cdot (17,2 + 0,1) = 3,8 \cdot 17,3 = 65,74$$

4. Vi får att $\varepsilon_1^\times = 61,92 - 58,14 = 3,78 \approx 3,8$.

5. $\varepsilon_2^\times = 65,74 - 61,92 = 3,82 < 3,9$.

6. Om vi sätter $\varepsilon = 3,9$ har vi åtminstone närmevärdet

$$ab = 61,9 \pm 3,9$$

Som vi ser sprider sig felet mycket mer vid multiplikation än vid addition och subtraktion. $\square$

Problem 5. Hur stort kan felet vara i en beräkning av omkretsen för en cirkelbana med diametern 1000 m, ifall man använder ett närmevärde till π med två korrekta decimaler?

Lösning: 1. Att π är 3,14 till två decimaler medför att $3,14 < \pi < 3,15$.

2. Multiplikation av olikheten i (1) med 1000 ger

$$\begin{aligned} 1000 \cdot 3,14 &< 1000 \cdot \pi < 1000 \cdot 3,15 \\ 3140 &< 1000\pi < 3150 \end{aligned}$$

3. Rad (2) medför att felet i beräkningen som högst kan vara 10 meter. $\square$

Problem 6 (fysik). Newtons andra lag definierar ett samband mellan den klassiska mekanikens begrepp kraft, massa och acceleration (hos en partikel/kropp):

$$F = ma$$

Antag att $F = \sqrt{5}$ N och $m = 3,31$ kg. Beräkna accelerationen a m/s².

Lösning. 1. Vi kan välja ett närmevärde till $\sqrt{5}$ till tre decimaler:

$$\sqrt{5} = 2,236 \dots$$

2. Massan är angiven med tre gällande siffror, varför vi enligt konventionen för gällande siffror utgår ifrån att den sista siffran är osäker, med följande felgränser:

$$m = 3,31 \pm 0,01 \text{ kg}$$

3. I det undre värsta-fall-scenariot får vi

$$a = F/m \approx 2,236/3,30 = 0,67757 \dots$$

4. I det övre värsta-fall-scenariot får vi istället

$$a = F/m \approx 2,236/3,32 = 0,67349 \dots$$

5. Med två decimalers noggrannhet har vi att $a = 0,67 \text{ m/s}^2$. $\square$

Genom en utvidgning av rationell aritmetik erhåller vi så *reell aritmetik*. Och själva kärnan, den bärande idén i den är *approximationen*. En approximation som görs med rationella tal och i synnerhet decimaltal. — Det är i den här meningen man kan kalkylera med reella tal (och utföra massiva numeriska datorberäkningar med dem).

2.4.3 Kvadratrötter: approximationsregeln och några räknelagar

Kvadratroten ur ett icke-negativt reellt tal a definieras som det icke-negativa reella tal b som är sådant att $b^2 = a$. Den sedvanliga beteckningen för kvadratroten är

$$\sqrt{a}$$

I vissa fall är kvadratroten ett rationellt tal, men det vanligaste fallet är att kvadratroten är irrationell.

Exempel 13. Här är några exempel på rationella kvadratrötter:

$$\begin{aligned} \sqrt{0} &= 0; & \sqrt{1} &= 1; & \sqrt{4} &= 2; & \sqrt{9} &= 3 \\ \sqrt{0,01} &= 0,1; & \sqrt{0,04} &= 0,2; & \sqrt{0,09} &= 0,3 \\ \sqrt{4/25} &= 2/5; & \sqrt{9/64} &= 3/8; & \sqrt{25/49} &= 5/7 \end{aligned}$$

$\square$

Exempel 14. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}$ är exempel på irrationella kvadratrötter. Ingen av dem kan uttryckas exakt som ett enda bråk. Faktum är att roten ur ett primtal

alltid är irrationell.¹⁰ $\square$

Följande är ett enligt modern aritmetik matematiskt giltigt påstående om de reella talen:

[12] *För varje positivt reellt tal a existerar ett entydigt bestämt positivt reellt tal $\sqrt{a}$ med egenskapen att $(\sqrt{a})^2 = a$.*

Det följer att ekvationen

$$x^2 = a$$

är lösbar i $\mathbb{R}$ för varje $a \geq 0$.

På grund av hur negativa tal och räkning med negativoperatorn $(-a)$ är definierade är produkten av två negativa tal alltid positiv. Givetvis är kvadraten på varje positivt tal också positiv. Det medför att det inte finns något reellt tal vars kvadrat är negativ. Alltså är det heller inte möjligt att dra kvadratroten ur negativa tal, så länge man rör sig inom det reella talsystemet. Om man däremot går över till de komplexa talen $\mathbb{C}$, en *algebraisk utvidgning* av de reella talen, så är det möjligt.

Vi sammanfattar i en display:

Inom det reella talområdet är kvadratroten ur ett negativt tal odefinierad. Om man, av någon anledning, behöver kunna handskas med kvadratroten ur ett negativt tal så får man gå över till det utvidgade talområdet komplexa tal.

De komplexa talen är mycket påtagligt en sorts matematisk uppfinning, i likhet med introduktionen av negativa tal. De utgör ett användbart verktyg både i viss matematisk problemlösning och i olika sorters tillämpningar av matematik, såsom datorgrafik, elektronik och kvantfysik.

Den praktiska fråga vi nu slutligen har kommit fram till och behöver ställa oss är *fråga 2*:

”Men hur gör man för att *faktiskt beräkna* kvadratroten ur ett tal?”

Låt oss titta på några exempel, där vi bestämmer närmevärden till kvadratroten ur ett positivt heltal:

Problem 7. Beräkna $\sqrt{7}$ till två decimaler.

Lösning: 1. Vi börjar med att uppskatta $\sqrt{7}$ upp till heltal. Det största heltal vars

¹⁰Bevis för detta finns i artikeln *Klassifikation av irrationella rötter* i del II av *Den första matematiken*.

kvadrat är mindre än eller lika med 7 är 2:

$$2^2 = 4 < 7 < 3^2 = 9$$

Upp till heltal är 2 det bästa närmevärdet till $\sqrt{7}$.

2. Nu uppskattar vi roten till en decimal (efter decimalkommat). Låt oss pröva med 2,5 och sedan gå uppåt eller nedåt:

$$2,5^2 = 6,25 < 7$$

$$2,6^2 = 6,76 < 7$$

$$2,7^2 = 7,29 > 7$$

Stopp! $\sqrt{7}$ upp till en decimal är alltså 2,6.

3. Slutligen till två decimaler. Låt oss pröva med 2,65 och sedan gå uppåt eller nedåt:

$$2,65^2 = 7,0225 > 7$$

$$2,64^2 = 6,9696 < 7$$

Stopp.

4. Slutsats: $\sqrt{7}$ till två decimaler är 2,64, eller, $\sqrt{7} = 2,64 \dots \square$

Lägg märke till att själva approximationsregeln (–villkoret, –metoden) är att om kvadraten på ett givet decimaltal är mindre än 7, så är det *tillåtet att säga* att decimaltalet är 'mindre än' $\sqrt{7}$; om kvadraten är större än 7, så är det tillåtet att säga att decimaltalet är 'större än' $\sqrt{7}$. Ovanstående är ett exempel på en metod för beräkning av kvadratroten ur ett tal inom en viss angiven felgräns eller till si och så många decimaler. Det är inte den mest effektiva metoden för beräkning av kvadratroten, men den fungerar och den visar på något av rent principiell betydelse.

Den algoritm som skissas i exempel 14 är relativt lätt att implementera på en dator (skriva ett datorprogram för). Det finns andra algoritmer för beräkning av närmevärden till kvadratroten ur ett tal, som tillåter manuell uppställning i likhet med liggande stolen och andra metoder för division. Jag överlåter på den läsare som är intresserad att fördjupa sig i detta ämne på egen hand.

På liknande sätt som med de fyra räknesätten kan vi nu, baserat på ovanstående och andra liknande paradigmexempel, formulera en generell princip eller regel för

hur symbolen 'kvadratroten ur' får användas för reella tal. Sådär lyder, vad vi här kallar för, **approximationsregeln för kvadratrötter**:

[13] *Låt a vara ett positivt reellt tal. Då gäller att*

$$q_1 < \sqrt{a} < q_2 \iff q_1^2 < a < q_2^2$$

för alla positiva rationella tal q_1 och q_2 .

I det fall $q^2 = a$ för något positivt rationellt tal q gäller per definition att $q = \sqrt{a}$; principen [13] *tar hand om* det irrationella fallet. Denna regel är egentligen allt man behöver ha med sig för att kunna bestämma kvadratroten till si och så många decimaler.

Genom att på scenen introducera en symbol $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, och utvidga de rationella talen med den är dess 'existens' garanterad av själva talsymbolen och reglerna för dess approximation: 'hur mycket' kvadratroten ur två är kan approximeras, i enlighet med ett schema för närmevärdesberäkning, och denna approximationsmetod rymmer inte någon matematisk gräns för hur litet felet i närmevärde kan bli — förutom noll. Var uppmärksam på att vi lika gärna hade kunnat formulera reglerna för kvadratrotsapproximation i den här stilen:

Om $q_1^2 < a < q_2^2$, för några positiva rationella tal q_1 och q_2 , så är det tillåtet att säga att " q_1 är mindre än kvadratroten ur a " och "kvadratroten ur a är mindre än q_2 ".

Skillnaden består i att medan [13] faktiskt utgör en sats av formen 'teorem i matematisk analys', så håller sig det senare påståendet inte inom de *lingvistiska former* som den matematiska satsen normalt anpassas till. Men alltså har vi att göra med något liknande en definition eller axiom för kvadratrötter: en grammatisk anmärkning med Wittgensteins ord.

Exempel 15. Vi har att

$$1,41^2 = 1,9881 < 2$$

och

$$(1,41 + 0,01)^2 = 1,42^2 = 2,0164 > 2.$$

Enligt approximationsregeln för kvadratrötter är $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$. Med andra ord är $\sqrt{2}$ beräknat till två decimaler 1,41. $\square$

I arbetet med att lära sig elementär algebra är det dessutom viktigt att behärska några allmänna **räkneregler för kvadratrötter**:

[14] Låt a och b vara positiva reella tal:

$$[\mathbf{a}] \quad \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

$$[\mathbf{b}] \quad \sqrt{a}/\sqrt{b} = \sqrt{a/b}$$

Bevis för dessa samband består i att visa att vänsterledet i (i) respektive (ii) uppfyller definitionen av kvadratroten i högerledet:

14(a): Enligt de räkneregler för $\mathbb{R}$ som arvsprincipen medger har vi att

$$VL^2 = (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab$$

Eftersom kvadratroten ur ett reellt tal är entydigt bestämd enligt [12] följer att $VL = HL$.

14(b): Visas i analogi med påstående (a). $\square$

Problem 8. Beräkna: (a) $\sqrt{40} \cdot \sqrt{0,4}$ (b) $\sqrt{1000}/\sqrt{10}$

Lösning: (a) Ur [14] följer att

$$\sqrt{40} \cdot \sqrt{0,4} = \sqrt{40 \cdot 0,4} = \sqrt{40 \cdot 0,4} = \sqrt{4 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 0,1} = \sqrt{4^2} = 4$$

$$(b) \quad \sqrt{1000}/\sqrt{10} = \sqrt{1000/10} = \sqrt{100} = \sqrt{10^2} = 10$$

Problemet är löst. $\square$

Problem 9. Förenkla det algebraiska uttrycket

$$\frac{\sqrt{18ab^2}}{\sqrt{2a}}$$

för $a, b > 0$.

Lösning: Räknelagar för de fyra räknesätten och kvadratroten ger:

$$\frac{\sqrt{18ab^2}}{\sqrt{2a}} = \sqrt{\frac{18ab^2}{2a}} = \sqrt{9b^2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{b^2} = 3b$$

Mer än så går inte att förenkla. $\square$

3 Kommentarer

3.1 Matematisk fördjupning

3.1.1 Talet π

Förutom diagonalen och sidan i en kvadrat är ett annat exempel på inkommensurabla storheter omkretsen och diametern i en geometrisk cirkel. Detta matematiska faktum lyckades matematiker inte bevisa förrän så sent som på 1800-talet. Däremot kan man säga saker i stil med: ”Omkretsen är över tre gånger så lång som diametern” och ”Omkretsen av cirkeln förhåller sig till diametern på ett ungefär som tjugotvå till sju”.

Enligt den traditionella definitionen anges storleksförhållandet mellan omkretsen och diametern av talet π (den grekiska bokstaven ” π ” infördes dock inte som beteckning förrän på 1700-talet). Bråket $22/7 = 3\frac{1}{7}$ är en övre gräns till π och utgör en av Arkimedes berömda approximationer. Den undre gränsen fastställde han till $223/71 = 3\frac{10}{71}$. Efter Arkimedes har vi alltså approximationen:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

En instängning av π mellan två rationella närmevärden, av typen bråk som faktiskt inte kan uttryckas exakt som decimaltal (!). Decimalutveckling av bråken ger de decimala närmevärdena $3\frac{10}{71} = 3,1408\dots$ och $3\frac{1}{7} = 3,1428\dots$, vilket betyder att

$$3,14 < \pi < 3,15$$

Med andra ord är talet π beräknat till två decimaler 3,14:

$$\pi = 3,14\dots$$

Med ett språk för decimaltal till hands kan vi konstatera att ”Cirkelns omkrets på ett ungefär är 3,14 av diametern”. Närmevärden till π har med datorer idag beräknats till flera hundra miljarder decimaler; även om det, som sagt, inom naturvetenskap och ingenjörskonst räcker gott och väl med färre än 50 decimaler till π , även vid beräkningar på astronomisk eller subatomär skala.

I geometriundervisningen på gymnasium och högskola låter man det normalt vara underförstått att storleksförhållandet mellan omkretsen och diametern i en geo-

metrisk cirkel är en matematisk kvantitet, som dessutom på ett entydigt sätt går att approximera med bråk (decimaltal) till vilken noggrannhet $\varepsilon > 0$ som helst. — Men hur gör man egentligen för att beräkna decimaler till π , och i vilken mening kan man 'vara säker' på att approximationen till godtyckligt antal decimaler alltid i princip låter sig göras?

Att $\pi > 3$ är ganska så lätt att inse genom följande resonemang:

1. Låt en cirkel vara given. Konstruera en hexagon inuti cirkeln.
2. Förbind hexagonens hörn med med cirkelns medelpunkt. Detta ger 6 stycken liksidiga trianglar, som alla har sidan 1 radie. Se figur 10.
3. Hexagonens omkrets räknar vi till 6 radier, vilket är lika mycket som 3 diametrar.
4. Men cirkelns omkrets är större än hexagonens. Alltså är cirkelns omkrets större än dessa 3 diametrar.

Att $\pi < 4$ är också lätt att inse:

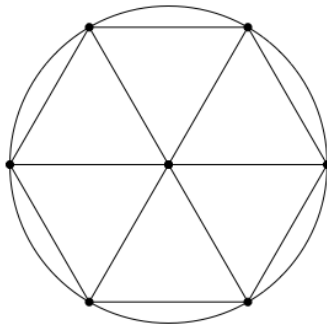
Omskriv cirkeln med en kvadrat. Kvadraten har fyra sidor, var och en en diameter lång. Kvadratens omkrets är alltså 4 diametrar, och uppenbarligen är kvadratens omkrets större än cirkelns.

Med liknande men lite mer komplicerade geometriska resonemang, som dock inte förutsätter mer än elementär geometri av typen Pythagoras sats, når man så småningom fram till Arkimedes approximationer. Jag överlåter på läsaren att fördjupa sig i temat klassisk geometri och uppskattning av π i mån av intresse.¹¹

Med moderna analytiska metoder har man tagit fram formler, som visar hur approximationen av π kan göras, i princip till varje givet antal decimaler. (Det förekommer i vissa framställningar av matematiken att talet π definieras analytiskt och inte geometriskt. Dessa formler bildar då utgångspunkten för möjligheten av att uttala sig om π inom den bestämda framställningen.) Även om läsaren inte kan eller planerar att göra så mycket med dessa formler i nuläget, kan det ändå vara intressant att få något exempel på hur de kan se ut.

En del beräkningar av decimaler till π utgår från *taylorutvecklingen* av funktionen

¹¹Ett tips på videoföreläsning: "Finding Pi by Archimedes' Method" av MathWithoutBorders:
https://www.youtube.com/watch?v=_rJdkhlWZVQ



Figur 10: En cirkel med en diameter utritad samt en inskriven hexagon. Hexagonen bildar 6 stycken liksidiga trianglar, vilka då var och en har sidan 1 radie. Bilden kan användas för att åskådliggöra approximationen $3 < \pi < 4$.

arcustangens:

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Eftersom $\arctan(1) = \pi/4$ radianer ger insättning av $x = 1$ i taylorutvecklingen och multiplikation med 4 i vänster- och högerled att (*)

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \dots$$

En formel som bland annat Leibniz kom fram till. Här ger upprepning av dessa enkla aritmetiska operationer successivt bättre närmevärden till π , vilket gör det möjligt att i princip bestämma ett godtyckligt antal decimaler.

Exempel 16. Låt oss beräkna seriens delsummor till några termer:

$$\begin{aligned} s_0 &= 4 \\ s_1 &= 4 - \frac{4}{3} = 2\frac{2}{3} \approx 2,66 \\ s_2 &= 2\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = 3\frac{7}{15} \approx 3,47 \\ s_3 &\approx 2,90 \\ &\vdots \\ s_{626} &\approx 3,143 \end{aligned}$$

Efter 626 termer börjar seriens delsummor att stabilisera sig, så att $3,14 < s_n < 3,15$. $\square$

Det finns mer effektiva formler för π -beräkning än (*), men den fungerar i princip och med den beräkningskapacitet en modern dator medger, så är behovet av ett mycket stort antal iterationer inte omedelbart ett hinder.

Ett bevis för att π är irrationellt framlades under andra halvan av 1700-talet av matematikern Johann Heinrich Lambert. Mot slutet av 1800-talet lyckades en annan tysk matematiker, Ferdinand von Lindemann, visa att π dessutom är ett så kallat transcendent tal, ur vilket omedelbart följer att π är irrationellt.

Vad det betyder för ett reellt tal att vara **transcendent** är att det inte utgör en rot till någon algebraisk ekvation, alltså en ekvation på formen

$$p(x) = 0$$

där $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ är ett polynom, med koefficienterna $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Q}$.

Om man nu kan visa att π är transcendent följer omedelbart, trivialt att π inte är rationellt. Antag nämligen motsatsen: att vi hade $\pi = \frac{a}{b}$ för några heltal a och b . Då skulle vi få π som roten till ekvationen

$$bx - a = 0$$

Men detta motsäger det förhållandet att π är transcendent. Slutsatsen är att π är irrationellt.

Egenskapen hos ett tal att vara transcendent är med andra ord en *starkare egenskap* än den att vara irrationellt. Det innebär att om ett tal är transcendent, så är det irrationellt, medan det omvända inte alltid gäller. Exempelvis är $\sqrt{2}$ en rot till den algebraiska ekvationen

$$x^2 - 2 = 0$$

vilket visar att den omvända implikationen inte gäller generellt.

Bevisen för π :s transcendens är för invecklade för att gå in på här, men det följer bland annat av något som kallas för *Lindemann–Weierstrass sats* ur den abstrakta algebran.

3.2 De reella talens historia

3.2.1 Jämförelser med den grekiska matematiken

I det grekiska matematiska tänkandet existerar vare sig 'reellt tal' eller 'irrationellt tal' som självständiga talbegrepp. Inte heller hade man något tecken för talet noll eller negativa tal. I geometrin talade man i termer av (*storleks*)*förhållanden*, *proportioner* mellan *geometriska storheter*, såsom sträckor, ytor och kroppar. Där emot hade man inte det språk för längd, area och volym, såsom mått givet ett visst val av längdenhet, som vi har i modern matematik.

Pythagoréerna, det samfund av filosofer, matematiker och mystiker som grundades av Pythagoras, var länge av uppfattningen att det räckte med heltal och bråk för att uttrycka precis alla möjliga storleksförhållanden mellan geometriska storheter (eller mellan längden på ljudintervall i musiken). I själva verket tänkte man sig att universums fundamentala struktur och principer kunde förstås matematiskt — faktiskt en väldigt fruktbar tanke om man ser till fysikens utveckling — och i synnerhet i termer av de positiva heltalen $1, 2, 3, \dots$. Någon gång under deras historia gjorde pythagoréerna dock den matematiska upptäckten att det finns geometriska storleksförhållanden som inte verkar kunna uttryckas exakt, analyseras i formen av ett enda bråk. Det enklaste klassiska exemplet på det här är storleksförhållandet mellan diagonalen och sidan i en kvadrat. Ett annat idéhistoriskt viktigt exempel är det gyllene snittet, som också intog ett slags esoterisk särställning för pythagoréerna.

Eftersom uppfattningen att 'allt här i världen' skulle kunna uttryckas med hjälp heltal eller som förhållanden mellan heltal (alltså bråk) var något av ett krav, en förväntning på verklighetens och matematikens *harmoni*, och inte bara en hypotes som man var beredd att ge upp hur lätt som helst och byta ut mot en annan, var det här en svår insikt. Kanske mer rättvisande mot historien, kunde man säga att denna upptäckt innebar en *öppning av horisonten* för pythagoréerna, och för senare grekisk matematik. Enligt den gängse berättelsen ska till och med en av de invigda ha råkat väldigt illa ut efter att ha avslöjat upptäckten för utomstående; jag vet inte om det här är sant eller om det bara är en skröna, men det är så det brukar berättas. Det säges att han dräptes genom dränkning.

I den grekiska matematiken efter pythagoréerna kom man så småningom att om varje par av geometriska storheter av samma sort (till exempel två sträckor) säga att de antingen är *kommensurabla*, "jämförbara", eller *inkommensurabla*, "ej jämförbara". Att två storheter är kommensurabla innebär att storleksförhållan-

det mellan dem låter sig uttryckas exakt som ett enda bråk. I detta fall går det verkligen att säga sådant som att ”Den här sträckan förhåller sig till den där som fem till två” eller ”Den här sträckan är fem halvor av den där sträckan”. Att två storheter är inkommensurabla innebär att det inte är möjligt att helt *matematiskt* exakt uttrycka storleksförhållandet som ett enda bråk. Man får då nöja sig med närmevärden (vilket visserligen för alla praktiska behov är tillräckligt).

3.2.2 Renässansen och den naturvetenskapliga revolutionen under 1600-talet: decimalsystemets framträdande på den europeiska scenen och den newtonsk-cartesiska konceptionen om ett tal.

Decimala positionssystem för representation av heltal och decimaltal (och till och med negativa tal) förekommer i Indien och Kina och andra kulturer långt tillbaka i historien, i Kina så långt tillbaka som tiden för Kristi födelse. I Europa används det romerska talbeteckningssystemet en bra bit upp i medeltiden. *De hindu-arabiska siffrorna* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 och decimalsystemet introduceras i Europa av den italienske matematikern *Leonardo av Pisa (Fibonacci)* i dennes verk *Liber Abaci* (”Boken om räknekonsten”) tryckt år 1202. Han hade fått lära sig siffrorna och vårt därmed förbundna talbeteckningssystem genom kontakten med arabiska handelsmän, som i sin tur hade tillägnat sig det av indierna en gång i tiden. Även om det fanns ett motstånd bland affärsmän och statsmän inför att använda det nya systemet, börjar man gradvis vänja sig vid det under sen medeltid och renässans. År 1585 publicerar den flamländske mångsysslaren Simon Stevin boken *De Thiende* (”Tiornas konst”), som inför en ny notation för decimalbråk (alltså decimaltal), behandlar decimalbråksräkning och förespråkar det nya talsystemet.

I den europeiska matematikens utveckling från 1600-talet och framåt väljer man att röra sig förbi heltalen och bråken till ett ännu vidare talbegrepp som också ska ta hand om inkommensurabla storheter och kvantiteter såsom $\sqrt{2}$. Denna förvandling av matematiken beror dels på att matematikerna nu har upptäckt algebrans användbarhet och dels på decimalsystemets framträdande på scenen.

I det engelska originalet lyder det citat som översätts i avsnitt ”Newtons beskrivning av det reella talet”:

By number we understand not so much a multitude of unities, as the abstracted ratio of any quantity, to another quantity of the same kind, which we take for unity. And this is threefold; integer, fraction, and surd: An integer, is what is measured by unity, a fraction, that which a submultiple part of unity measures, and a surd, that to which unity is incommensurable.

Newtons beskrivning av *number* ligger nära den ”naturliga” förståelse av begreppet, enligt vilken det reella talet uttrycker en viss kvantitet, ett abstrakt storleksförhållande, och är möjligt att representera på tallinjen. Detta utgör dock inte en definition i den moderna matematikvetenskapens bemärkelse, utan har mer karaktären av att ringa in en allmän idé, en sorts väsensdefinition. Newtons beskrivning är jämförbar med Euklides ”En punkt är det som inte har några delar” och ”En linje är en längd utan bredd”. Det är inte det att sådana beskrivande anmärkningar till ett begrepp eller en symbol är oviktiga för förståelsen, men att de har *en annan roll* i det matematiska tänkandet, jämfört med moderna standarddefinitioner. Den senare typen av definition utnyttjas explicit som nyckelsteg i samband med bevisföring, vilket inte är fallet med Newtons beskrivning.

Emellertid säger Newtons anmärkning fortfarande mycket viktiga, träffande saker om hur man normalt tänker i matematik, naturvetenskap och ingenjörskonst när man faktiskt jobbar med, handskas med, storheter i geometri, fysik, kemi och så vidare. I samband med matematisk modellering är denna allmänna, ”intuitiva”, förståelse av de reella talen väsentlig. Det hör till kriterierna på att ha förstått det reella talbegreppet att man kan använda det på det här sättet vid modellering av verkligheten och vid geometrisk analys.

3.2.3 1800-tal: analysens aritmetisering, rigorositetssträvanden och de mängdteoretiska konstruktionerna

Under 1800-talet kommer flera ledande matematiker att uppleva otillfredsställelse med de gamla sätt att beskriva eller känneteckna talen som hänvisar till ”storheter”, ”linjens kontinuitet” och ”kontinuerliga kvantiteter”. Man brukar beskriva upplevelsen som den av en allmän brist på *stringens*, *rigorositet* med grundbegreppen i analysen och matematiken överhuvudtaget. Man upplevde att matematiken hade hamnat i ett läge där det fanns ett behov av besinning på ämnets själva *grundvalar*. Detta sammanhänge med insikten/upptäckten av icke-euklidisk geometri och olika oväntade ’resultat’ av experimenterande med oändliga serier och kurvor. I analysen (teorin för gränsvärden, funktioner, derivator, integraler, med mera) utgick man från samband som man inte hade något bevis för. Det fanns ingen ordning upprättad för de reella talen, inom ett system av definitioner, axiom och teorem. Den här perioden i matematikens och vetenskapens historia, där våra moderna begrepp om funktion, gränsvärde, derivata, med mera, tog gestalt, brukar kallas för *analysens aritmetisering*.

Ett av de tidiga förslagen på en mer ’stringent’ beskrivning eller konstruktion av

de reella talen var att helt enkelt försöka definiera ett reellt tal som en oändlig decimalserie, varefter de fyra räknesätten och olika egenskaper hos decimalserier definieras på ett helt formellt, algebraiskt, sätt. Den nackdel man upplevt med den här vägen såsom konstruktion av de reella talen är dels att den är otymplig (bland annat på grund av att man måste kunna ta hand om decimalutvecklingar som slutar i en oändlig följd av 9:or) och dels något godtycklig (*ad hoc*). Apor på uppfattningen att ett "Ett reellt tal är en oändlig decimalutveckling" skulle de flesta matematiker säga ungefär såhär:

"Det vore mer korrekt att säga att varje reellt tal *har* en oändlig decimalutveckling, som är entydigt bestämd. Undantaget är en decimalutveckling som slutar med en oändlig följd av 9:or, men i det fallet kan man helt enkelt uttrycka det reella talet som ett enda decimaltal, punkt. Men rent teoretiskt är det inget speciellt med decimalutvecklingar: exakt samma reella tal skulle också kunna ges en oändlig *binärutveckling* till exempel."

Det som i många moderna läroböcker och matematisk historieskrivning framställs som det verkligt stora genombrottet med den här frågan "Vad är ett reellt tal, egentligen?" är de så kallade *mängdteoretiska konstruktionerna* av de reella talen. De två mest fullständigt genomarbetade konstruktionsmetoderna föreslogs under 1800-talet av två tyska matematiker, med bara några års mellanrum: Richard Dedekind och något senare Georg Cantor. Cantors metod baseras på *cauchyföljder*, också kallat *fundamentalföljder*, av rationella tal. Dedekinds metod baseras på *dedekindsnitt* i mängden av rationella tal. Det finns andra konstruktionsmetoder, som påminner om eller är variationer på dessa två.

Att dessa matematiker upplevde behovet av klargörande och uppstramning av begreppen så pass starkt som de gjorde handlade i stor utsträckning också om undervisningen på tekniska högskolor och universitet (vad jag förstår). Man kände att när det gällde undervisningen om matematikens grunder för förstaårsstudenter var man tvungen att sväva lite på målet. Det fanns många frågor som man inte hade något riktigt bra svar på: "Men hur vet ni att det där gränsvärdet verkligen existerar?" med mera. Den tyske matematikern Richard Dedekind skriver i den numera klassiska avhandlingen *Stetigkeit und irrationale Zahlen* ("Om kontinuitet och irrationella tal"):

Det var hösten år 1858 som min uppmärksamhet för första gången kom att dras till de iakttagelser och problem som nu utgör ämnet för den här uppsatsen. I egenskap av professor vid Tekniska Högskolan i Zürich fann

jag mig för första gången i mitt liv förpliktigad att hålla föreläsningar om differentialekalkylens grunder och då kunde jag mer akut än någonsin tidigare uppleva avsaknaden av genuint *vetenskapliga grundvalar för aritmetiken* [min kurs.].¹²

Även idag skulle många professionella matematiker — kanske majoriteten — uttrycka sig såhär:

”En verkligt rigorös definition av de reella talen och en logiskt stringent framställning av deras kalkyl, utgår från någon mängdteoretisk konstruktion ovanpå de rationella talen: med cauchyföljder, dedekindsnitt, eller något i den stilen. Det spelar egentligen ingen roll vilken konstruktion man väljer, eftersom de resultat man når fram till i slutändan är desamma: räknelagarna, ordningsegenskaper, grundläggande satser i analysen, och så vidare, kan etableras med vilken som helst av konstruktionerna. Som en algebraisk struktur (av typen fullständig arki-mediskt ordnad kropp) är de reella talen unik upp till isomorfi.”

Läroböckerna till kurser i analysens grunder (de kurser i ”mathematical analysis” som kommer efter grundläggande ”calculus” i en eller flera variabler) brukar ta med något kapitel som går igenom grunddragen i åtminstone ett av dessa två konstruktionsförfaranden.

Låt oss titta lite närmare på Cantors respektive Dedekinds metoder.

Cantors cauchyföljdsmetod

Det finns en nära koppling mellan Cantors metod och försöken att definiera de reella talen i termer av oändliga decimalutvecklingar. Själva paradigmexemplet på en cauchyföljd är nämligen en oändlig decimalsummeföljd, såsom $0, 0.3, 0.33, 0.333, \dots$. I allmänhet är en cauchyföljd en oändlig följd av rationella tal som har den egenskapen att den ger intrycket av att konvergera, av att närma sig något slags gränsvärde, men utan att man för den delen alltid kan uttrycka det här gränsvärdet som ett enda bråk. Cauchyföljden är som en approximationsföljd av successivt bättre närmevärden till ’något tal’, som är sådan att approximationen kan göras till godtycklig noggrannhet.

Cantors ”trick” går nu ut på att definiera ett reellt tal som en viss typ av mängd av cauchyföljder, vad man kallar en *ekvivalensklass* i mängden av alla cauchyföljder.

¹²Richard Dedekind, *Essays On The Theory of Numbers*, s. 1. Min översättning från engelskan.

Två följder som ingår i samma ekvivalensklass har egenskapen att de ger intrycket av att konvergera mot exakt samma gränsvärde. Det här 'ger intrycket av' har en teknisk betydelse som vi inte behöver gå in på här (se artikeln *De reella talen: matematisk fortsättning*). Tag som exempel cauchyföljderna av decimaltal:

$$\begin{aligned} &1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots \\ &0, 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, 0.99999, 0.999999 \dots \end{aligned}$$

Båda dessa ser ut att konvergera mot samma gränsvärde: nämligen talet 1. Alltså är de ekvivalenta, i Cantors mening, och representerar samma reella tal. Det definitionsförslag som Cantor gav ser med andra ord ut såhär:

(4) "Ett reellt tal är en ekvivalensklass i mängden av alla cauchyföljder."

Därefter kan Cantor definiera de fyra räknesätten och olika egenskaper hos dessa såsom mängder konstruerade "reella tal", helt enkelt genom att istället definiera operationer på och egenskaper hos ekvivalensklasser av cauchyföljder och visa att dessa operationer och egenskaper ger det man ville ha redan från första början: att räknelagarna är uppfyllda, att varje positivt reellt tal har en kvadratrots bland de reella talen, att varje reellt tal har en unik decimalutveckling, och andra saker.

Dedekinds snittmetod

Dedekinds metod går, som sagt, istället ut på dedekindsnitt i de rationella talen. Medan Cantors metod ligger nära idén med decimalutvecklingar, ligger Dedekinds idé närmare anknytningen mellan det reella talbegreppet och den geometriska förståelsen av reella tal som svarande mot punkter på tallinjen och ordningsrelationen $<$ som en linjär ordning.

Ett (**dedekind**)**snitt** är en uppdelning av mängden av rationella tal i två delklasser, den undre A_1 och den övre A_2 , som uppfyller villkoret att varje element i den undre klassen är strikt mindre än varje element i den övre klassen. Med matematisk notation:

- (i) $A_1 \cup A_2 = \mathbb{Q}$
- (ii) $q_1 \in A_1 \wedge q_2 \in A_2 \implies q_1 < q_2$

Villkor (i) utsäger att varje rationellt tal hamnar i antingen den ena eller den andra av dessa klasser, och (ii) att varje element i den undre klassen är strikt mindre än

varje element i den övre klassen. Själva snittet skrivs hos Dedekind som ett ordnat par (A_1, A_2) , och detta är fortfarande den vanliga notationen.

Det definitionsförslag som Dedekinds metod medger är nu det här:

- (5) "Ett reellt tal är ett snitt (A_1, A_2) i mängden av rationella tal $\mathbb{Q}$. Om den undre/övre klassen har ett största/minsta element q , så säger vi att snittet utgör eller korresponderar mot ett rationellt tal, nämligen q . Om såväl största som minsta element saknas i delmängderna, så definierar snittet ett irrationellt tal α ."

Därefter kan Dedekind definiera de fyra räknesätten och olika egenskaper hos de så konstruerade "reella talen", genom att istället definiera operationer och egenskaper på snitt. Resultatet kommer återigen att vara att samma formella räknelagar, ordningsegenskaper och grundläggande samband gäller. Kvantiteten 'kvadratroten ur två', till exempel, definieras som det dedekindsnitt $\sqrt{2} = (A_1, A_2)$ i vilket den undre klassen innehåller alla rationella tal vars kvadrat är mindre än 2 och den övre klassen alla rationella tal vars kvadrat är större än 2. Med mängdlärans skrivsätt:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\} \\ A_2 &= \{x \in \mathbb{Q} : x^2 > 2\} \end{aligned}$$

Detta snitt motsvarar eller utgör då ett irrationellt tal, eftersom A_1 saknar ett största element och A_2 ett minsta element.

För en mer detaljerad genomgång av Dedekinds eller Cantors metod, se listan med förslag på vidare läsning. Dessutom finns det förstås gott om fri information om ämnet på internet.

3.3 Logiska och filosofiska reflektioner

De två viktigaste inspirationskällorna inom (den västerländska) filosofin för mitt eget matematikfilosofiska tankearbete har, förutom Platonismen och den moderna formella logiken (med namn som Bertrand Russell, David Hilbert och Kurt Gödel), varit Ludwig Wittgenstein och den svenska filosofen Sören Stenlund (professor emeritus vid Uppsala universitet). De flesta uppslag i den här och en del andra av mina texter kan uppfattas som utläggningar utifrån min självständiga läsning av Stenlunds skrifter.

3.3.1 En symbolisk representationsprincip?

Om man läser det vi här har benämnt approximationsprincipen helt bokstavligt — såsom man kunde föreställa sig någon läsa en lagtext mycket pedantiskt — utsäger den noga räknat bara att reella tal kännetecknas av en viss egenskap: nämligen approximerbarhet med bråk/decimaltal. Däremot säger den ingenting explicit om att det *existerar* något sådant som ett reellt tal! Detta tycks innebära att vi med endast approximationsprincipen till hands inte har något villkor som 'garanterar' att vissa reella tal 'faktiskt' existerar: irrationella kvadratrötter, gränsvärdet till en decimalsummeföljd, talet e , med mera.

Den fråga vi därför ska relatera till i det här fördjupande avsnittet är den här, *fråga 3*:

"Men hur vet man egentligen att tal som $\sqrt{2}$, π eller $e^{3,55}$ ens existerar, är väldefinierade?"

I det här avsnittet vill jag antyda ett sätt att närma sig den här frågan om det reella talets existens, som är en smula oortodox, åtminstone jämfört med den axiomatiska approach till de reella talen som utmärker de flesta läroböcker i grundläggande analys, där man för den teoretiska framställningen (typiskt i något av lärobokens appendix) inleder med att bara fastslå de reella talens fullständighets-egenskap, i formen av supremum- eller monotonitetsaxiomet. Beskrivningen här har egentligen karaktären av en *fundering*, en frågeställning, och inte av ett direkt påstående. Den har viktiga beröringspunkter med de mängdteoretiska ansatser till logisk framställning som går under rubriken "mängdteoretisk konstruktion av de reella talen", varav de två mest frekventa är Dedekinds snittmetod respektive Cantors cauchyföljdsmetod. Grundritningen för dessa går vi igenom i den historiska delen, men detaljerna överlåter jag till läsaren att fördjupa sig i efter intresse. Jag skriver även lite mer om dem i andra sammanhang.

Den väsentliga skillnaden här är dock att jag inte vill betona eller fästa någon vikt vid att 'konstruktionen' formuleras med stöd av den terminologi och notation som hör till mängdläran. Istället kommer vi att röra oss med och inom följande vokabulär:

symbol, kvantitet, kvantitativ, approximation, felgräns, noggrannhet, regler, villkor

med mera. Det finns olika anledningar till att jag föredrar den här rutten, framför någon specifik mängdteoretisk konstruktion, varav den viktigaste är att jag

upplever den som principiellt mer klargörande.

Om vi med vilande blick betraktar dels lejonparten av matematisk praktik, sådan den ser ut både i tekniska och vetenskapliga tillämpningar såväl som ren matematisk forskning, och dels de klassiska mängdteoretiska konstruktionerna, så kommer man att kunna lägga märke till följande omständighet:

Om S är en kvantitativ symbol som uppfyller approximationskriteriet, så kommer det inom matematiken vara tillåtet att säga att S 'är ett reellt tal' alternativt 'representerar ett reellt tal' eller 'korresponderar mot ett reellt tal'; ett reellt tal vars 'existens' således är garanterad. Detta 'reella tal' satisfierar exakt samma villkor, regler, metoder för approximationen som symbolen S .

I praktiken används samma beteckning för 'det reella tal' som S representerar som för den redan givna symbolen S . Samtliga mängdteoretiska konstruktioner av $\mathbb{R}$ utgår i själva verket från denna normbildande princip.

Om man exempelvis kan konstatera att " S är större än 1,5 men mindre än 1,6", så är det tillåtet att om det motsvarande reella talet säga att det är större än 1,5 men mindre än 1,6. För att förtydliga: villkoret är att S är någon sorts kvantitativ symbol, för vilken det finns *offentliga regler* för dess approximation, regler som eventuellt ska förstås på ett abstrakt, schematiskt, sätt. Exempel utgör förstås tal-symboler som $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}+3$, π , φ , e , men också mer sammansatta uttryck såsom

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}$$

Varje symbol som uppvisar egenskapen 'entydig approximerbarhet med bråk' kommer så att säga att avyttra ett reellt tal som det vore ett minnesmärke.

Det kursiverade påståendet är alltså en *explikering*, en kärnfull summering, av ett drag hos gällande praxis i modern matematik, som hänger nära samman med fullständighetsegenskapen. Påståendet skulle varken räknas som ett axiom, en definition eller ett teorem, enligt de lingvistiska former som dessa förväntas vara anpassade till. Det är istället en kriteriebeskrivning som återspeglar en kedja av beslut som fattades inom matematiken under dess historiska utveckling, åtminstone sedan andra halvan av 1800-talet. Man skulle kunna tänka sig att döpa denna specifika kriteriebeskrivning till **den symboliska representationprincipen** (eller – **representationskriteriet**) för $\mathbb{R}$.

För att göra poängen med denna explikering tydlig kan vi låta några exempel tjäna som illustrationer.

Exempel 17. De rationella talen bildar en delmängd av de reella talen. Att varje givet rationellt tal q får sägas utgöra, representera eller korrespondera mot ett bestämt reellt tal kan sägas 'följa' ur representationskriteriet av att varje givet rationellt tal är sin egen bästa approximation och att detta "närmevärde" dessutom gäller till vilken noggrannhet som helst (inklusive noll). $\square$

Exempel 17 innehåller det väsentliga steget i Cantors cauchyföljdskonstruktion av $\mathbb{Q}$ som delmängd av $\mathbb{R}$.

Exempel 18. Kvadratroten ur två beräknad till tre decimaler är 1,414. Detta innebär att

$$1,414 < \sqrt{2} < 1,415$$

Man kan alltid finna decimala närmevärden vars kvadrater stänger in talet 2 inom ett intervall, vars bredd i sin tur mer och mer närmar sig noll (även om den aldrig blir precis lika med noll):

$$\begin{aligned} 1^2 &= 1 < 2 < 2^2 = 4 \\ 1,4^2 &= 1,96 < 2 < 1,5^2 = 2,25 \\ 1,41^2 &= 1,9881 < 2 < 1,42^2 = 2,0164 \\ 1,414^2 &= 1,999396 < 2 < 1,415^2 = 2,002225 \\ \dots &\dots \dots \end{aligned}$$

Dessa successiva närmevärden utgör allt finare approximativa lösningar till ekvationen

$$x^2 = 2$$

Lägg märke till att den implicita approximationsregeln här är att om kvadraten på ett givet decimaltal är mindre än 2, så är det *tillåtet att säga* att decimaltalet är 'mindre än' $\sqrt{2}$; om kvadraten är större än 2, så är det tillåtet att säga att decimaltalet är 'större än' $\sqrt{2}$. $\sqrt{2}$ utgör med andra ord en kvantitativ symbol, en talsymbol, som på ett entydigt sätt låter sig approximeras med bråk inom varje given felgräns större än noll. Ur representationsprincipen 'följer' återigen att symbolen ' $\sqrt{2}$ ' utgör, representerar, korresponderar mot ett 'reellt tal' betecknat: $\sqrt{2}$. $\square$

Dessa och liknande exempel innehåller "på ett dolt sätt" det väsentliga steget i Dedekinds konstruktion av $\sqrt{2}$ som ett visst slags snitt i den rationella tallinjen. Man skulle formellt kunna introducera en abstrakt symbol $S = S[\sqrt{2}]$ med egenskapen

att

$$(i) \quad q^2 < 2 \iff q < S$$

$$(ii) \quad q^2 > 2 \iff q > S$$

för alla positiva rationella tal q . Denna symbol har alla önskvärda approximations-egenskaper och enligt den symboliska representationsprincipen motsvarar den ett reellt tal. Detta reella tal kunde man då definiera som $\sqrt{2}$. I Dedekinds klassiska konstruktion sker den formella symbolintroduktionen i mängdläran terminologi och notation. (Men den fråga man skulle kunna ställa idag är av vilka skäl det är nödvändigt att utföra konstruktionen via mängdläran? Kan inte symbolen konstrueras direkt genom att ange villkor för approximationen?)

Liknande konstateranden kan göras för $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$ och så vidare, kort sagt, för varje naturligt tal n . Med andra ord säger vi att ekvationen

$$x^2 = n$$

alltid är 'möjlig att lösa i de reella talen'. Det enda fall som ger en rationell kvadratrots är då n är kvadraten på ett annat heltal.

Exempel 19. Det gäller som en grundläggande regel i klassisk geometri att varje par av sträckor AB och CD kan jämföras med varandra och att det bestämda storleksförhållande som råder mellan AB och CD entydigt låter sig approximeras med bråk till varje noggrannhet förutom noll. Kalla storleksförhållandet för S . Givet ett godtyckligt rationellt tal q är det alltså, i den geometriska kalkylen, 'möjligt att säga' om S huruvida det är mindre, lika med eller större än q . Den geometriska regeln i förening med representationsprincipen innebär att S motsvarar ett reellt tal.¹³ Givet ett visst val av sträcka OE som 'längdenhet' kan nu varje annan sträcka AB tilldelas ett reellt tal $|AB|$ kallat 'längden' av AB i enheten OE , definierat som storleksförhållandet mellan AB och sträckan OE . Detta är förstås principen för tallinjen. $\square$

3.3.2 Decimalutvecklingens summa som symbolisk konstrukt

Låt oss betrakta en generell decimalutveckling

$$N, d_1 d_2 d_3 \dots$$

¹³Att par av sträckor alltid kan sättas i 1–1-korrespondens med reella tal förekommer ofta som ett av axiomen i moderna axiomatiseringar av klassisk geometri.

där N är ett naturligt tal och d_i är en siffrorna $0, 1, \dots, 9$, för $i = 1, 2, 3, \dots$. Som sagt, en decimalutveckling uppfattas i matematikvetenskapen egentligen som beteckningssättet för en oändlig talföljd (inte som ett specifikt tal), en decimalsummeföljd, som vi kan beteckna $\{D_n\}$:

$$\begin{aligned} D_0 &= N \\ D_1 &= N, d_1 \\ D_2 &= N, d_1 d_2 \\ D_3 &= N, d_1 d_2 d_3 \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \end{aligned}$$

N är ett naturligt tal och varje D_j , för $j = 0, 1, 2, 3, \dots$, är ett decimaltal.

Vi skulle nu helt schematiskt, formellt–algebraiskt kunna introducera en symbol

$$D = D[\{D_n\}]$$

med följande för symbolen definierande villkor:

- (i) $D_n \leq D$
- (ii) $D < D_n + 10^{-n}$

för varje naturligt tal n . Detta är vad som redan ligger implicit i idén med en decimalutveckling: för varje element D_n i decimalutvecklingen är det *tillåtet att säga* att den är mindre än eller lika med 'den totala summan' D , och så vidare. Dessa regler bestämmer i själva verket approximationsvillkor för den formella symbolen D , som tillåter närmevärdesbestämning till varje given noggrannhet $\varepsilon > 0$. Man skulle förslagsvis kunna säga att D är en **symbolisk konstrukt** (jämför med Hermann Weyl).¹⁴

Enligt representationsprincipen finns det ett reellt tal som motsvarar D , i det

¹⁴Sören Stenlund skriver:

Symbolical construction, in which the symbols, in themselves, do not always signify anything accessible as intuitive experience, is henceforth Weyl's mathematical approach in theoretical physics. The great importance he attached to this new symbolic orientation is clear from the following statement: "[...] only in mathematics and physics, as far as I can see, has symbolic-theoretical construction acquired sufficient solidity to be convincing for everybody whose mind I open to these sciences."

Ur artikeln "Contemporary physics and symbolic mathematics" (s. 83), i samlingen *The Origin of Symbolic Mathematics and the End of the Science of Quantity* (Uppsala Philosophical Studies 59).

att det satisfierar exakt samma approximationsvillkor som den symboliska konstrukten. För enkelhetens skull väljer vi också samma beteckning för det reella talet, nämligen D . Här har vi faktiskt principskissen för Dedekindkonstruktionen av summan D till en decimalserie.

Exempel 20. Låt oss titta på den specifika decimalutvecklingen

$$0,10110111011110\dots$$

Den består av strängar av siffran 1 av teckenlängd $1, 2, 3, \dots$ åtskilda av 0:or. (Jag vet inte om denna har någon konkret praktisk betydelse utanför matematiken, här tar vi den bara som illustration till en allmän idé.) Eftersom decimalutvecklingen är aperiodisk, kan vi omedelbart konstatera att den inte kan representera något rationellt tal. Utvecklingens motsvarande decimalsummeföljd $\{D_n\}$ är

$$\begin{aligned} D_0 &= 0 \\ D_1 &= 0, 1 \\ D_2 &= 0, 10 \\ D_3 &= 0, 101 \\ D_4 &= 0, 1011 \\ D_5 &= 0, 10111 \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \end{aligned}$$

Formellt kunde vi nu introducera en symbol D med de approximationsvillkor som anges i föregående exempel. Så kan vi exempelvis säga saker som:

” D till 4 decimaler är $0,1011$ ”,

” D är större än $0,101101$ ”,

” D är mindre $0,11$ ”.

Om det hypotetiskt fanns ett behov av den i något naturvetenskapligt eller tekniskt sammanhang kan man för alla praktiska syften, och utan större möda, approximera den till önskat antal decimaler. I enlighet med representationskriteriet utgör, representerar, motsvarar den symboliska konstrukten D ett reellt tal D . Dessutom gäller att det reella talet D är irrationellt. $\square$

Kanske kunde man säga att ’existensen av decimalutvecklingens summa’ inom matematiken är av en *symbolisk* karaktär? Det hör åtminstone inte till de normala kriterierna på att man har ’bemästrat’ modern matematik — i bemärkelsen blivit

skicklig på beräkningar, hantering av algebra, lärt sig vektorgeometri och matriser, kan tillämpa matematiken inom fysiken, med mera — att man tar ställning till en fråga som den om decimalseriens summa, kvadratroten ur två, talet e , och så vidare, existerar i någon *annan* ontologisk bemärkelse av 'existens'. Den frågan förefaller hamna utanför själva matematiken som vårt gemensamma kulturarv, dess teknisk-vetenskapliga tillämpningar, beräkningar, modeller och teorem.

3.3.3 Samband med de reella talens fullständighetsegenskap

Det här teoretiska, formella behovet av någon sorts existensgaranti hänger alltså nära samman med det som kallas för **de reella talens fullständighetsegenskap**. I de moderna läroböcker i matematisk analys för högskola och universitet som finns på bokmarknaden, är det (åtminstone sedan andra halvan av 1900-talet) inte alls ovanligt att man presenterar fullständigheten under den allmänna rubriken "*axiom för de reella talen*".

Fullständigheten motsvaras (bland annat) av två villkor, som också brukar gå under namnen "axiom". Det ena heter **monotonitetsaxiomet** och utsäger att:

- [15] *Varje växande men uppåt begränsad oändlig följd av reella tal har ett gränsvärde i $\mathbb{R}$.*

Monotonitetsaxiomet följer från ett till synes svagare antagande:

- [15'] *Varje växande och uppåt begränsad oändlig följd av rationella tal (bråk) har ett gränsvärde i $\mathbb{R}$.*

vilket följer ur ett ännu svagare antagande:

- [15''] *Varje växande och uppåt begränsad oändlig följd av decimaltal har ett gränsvärde i $\mathbb{R}$.*

Eftersom implikationen åt höger är trivial, innebär detta med andra ord att egenskaperna [15], [15'] och [15''] är matematiskt ekvivalenta. Vi ser alltså att monotonitetsaxiomet står i nära samband med tanken att reella tal kännetecknas av sin möjlighet till decimalutveckling.

Den andra axiomformuleringen brukar kallas för **supremumaxiomet**:

- [16] *Varje uppåt begränsad mängd av reella tal har en minsta övre gräns (supremum) i $\mathbb{R}$.*

Ett annat ord för detta matematiska samband är **Dedekinds fullständighetsaxiom**. Denna minsta övre gräns kallas också för **minsta majorant** eller **supremum** till M och betecknas

$$\sup M$$

Liksom är fallet med monotoniteten är supremumaxiomet även en konsekvens av det svagare antagandet

[16'] *Varje uppåt begränsad mängd M av rationella tal har en minsta övre gräns i $\mathbb{R}$.*

Detta följer ur ett ännu svagare antagande:

[16''] *Varje uppåt begränsad mängd M av decimaltal har en minsta övre gräns i $\mathbb{R}$.*

Eftersom implikationen åt höger är trivial, innebär detta, i analogi med monotonitetsaxiomet, att egenskaperna [16], [16'] och [16''] också är matematiskt ekvivalenta.

Det är enkelt att visa att "supremumaxiomet" lika gärna kan formuleras i termer av nedåt begränsade mängder, som det ekvivalenta påståendet:

[16'''] *Varje nedåt begränsad mängd M av reella tal har en största nedre gräns i $\mathbb{R}$.*

Denna största nedre gräns kallas även **största minorant** eller **infimum** till M och betecknas

$$\inf M$$

Givet mängden M speglas dess egenskaper med avseende på supremum/infimum i den "negativa" mängden $M' = \{-x \mid x \in M\}$.

En alternativ formulering av fullständighetsegenskapen utförs i termer av approximerande talföljder, alltså cauchyföljder, en approach som ligger nära Cantors konstruktion av $\mathbb{R}$ genom ekvivalensklasser av cauchyföljder:

[17] *Varje cauchyföljd har ett gränsvärde i $\mathbb{R}$.*

Man skulle också kunna formulera fullständigheten i termer av dedekindsnitt:

[18] *Varje dedekindsnitt i de rationella talen bestämmer ett reellt tal α , sådant att alla element i den undre klassen är mindre än eller lika med α , och alla element i den övre klassen är större än eller lika med α .*

Sammanfattningsvis: De reella talens fullständighetsegenskap kan formuleras i termer av existensen av antingen något gränsvärde för en oändlig följd av tal eller någon gräns för en mängd av tal.

Att visa att dessa olika formuleringar är matematiskt ekvivalenta, utgående från definitioner av gränsvärde, med mera, är en lärarik övning i formellt matematiskt tänkande. Låt oss för att exemplifiera hur resonemangen kan se ut visa hur monotonitetsaxiomet följer ur supremumaxiomet:

1. För att visa implikationen, antag att [17] är sant.
2. Antag att $(a_n)_{n=0}^{\infty} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ är en uppåt begränsad och växande oändlig följd av reella tal.
3. Sätt $M = \{\text{alla element i följden } (a_n)\} = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$. Mängden M är en uppåt begränsad mängd av reella tal. Ur premiss (1) följer att M har en minsta övre gräns.
4. Sätt $L = \sup(M)$. På grund av definitionen gäller att $a_n \leq L$, för alla $n \in \mathbb{N}$. Vi ska visa att L är gränsvärdet för talföljden (a_n) . Låt därför $\varepsilon > 0$. Det vi behöver visa är att det finns ett heltal N sådant att $L - a_n < \varepsilon$ för alla $n > N$.
5. Eftersom L är den minsta övre gränsen till M är $a_N > L - \varepsilon$ för något heltal N . (I annat fall skulle ju $L - \varepsilon$ vara en ännu mindre övre gräns till M , en motsägelse.)
6. Då (a_n) är en växande talföljd gäller alltså att $a_n > L - \varepsilon$ för alla $n > N$. Denna olikhet är en omskrivning av $L - a_n < \varepsilon$.
7. Vi har alltså visat att följden (a_n) har ett gränsvärde i $\mathbb{R}$ under antagandet i rad (2).

Beviset för implikationen [16] $\implies$ [15] är därmed klart.

Både monotonitets- och supremumaxiomet har karaktären av *existenspostulat*, vars funktion också är att 'garantera existensen' av vissa 'objekt': av det och det reella talet, av talet e och andra 'gränsvärden', eller den allmänna 'summan av en oändlig decimalsummeföljd' för den delen. Båda villkoren fastställer gentemot de rationella talen särskiljande drag hos de reella talen. Monotonitets- och supremumaxiomet är egentligen matematiskt ekvivalenta: det ena implicerar det andra och vice versa. Det "räcker" alltså med ett av dem i den matematiska teorin, framställningen.¹⁵

En vits med att ställa upp (en av) dessa såsom grundläggande beskrivningar är förstås att existensen av kvadratrötter och många andra slags irrationella tal svara mot *vissa redan sedan långt tillbaka i vetenskapshistorien utnyttjade talsymboler*, därmed blir 'garanterad'. I vidare utsträckning rör det sig om *behovet av*

¹⁵I vilken mening de utgör axiom beror dels på det sammanhang man rör sig inom och dels på vad man lägger för innebörd i ordet "axiom". I ett faktiskt försök till axiomatisk-deduktiv presentation kunde man nöja sig med ett av dem, i vilket fall det andra villkoret inte skulle räknas till axiomen, även om det bär namnet. I de mängdteoretiska försöken att konstruera de reella talen vill man istället nå fram till båda fullständighetsvillkoren som teorem, och inte bara acceptera dem som axiom, i vilket fall varken det ena eller det andra strängt taget utgör axiom i systemet.

tydlighet i uppbyggnaden av den matematiska analysen, där de reella talens fullständighetsegenskap återkommande utnyttjas vid bevisen för olika grundsatser om funktioner, gränsvärden, kontinuitet, derivator, integraler, med mera (exempelvis satsen om mellanliggande värden). I moderna läroböcker förläggs oftast bevisen för dessa ständigt utnyttjade, men som matematiker kunde säga "intuitivt självklara", samband till något appendix.

Det som vi här förslagsvis kallat den symboliska representationsprincipen står i nära samband med fullständighetsegenskapen, de mängdteoretiska konstruktionerna av $\mathbb{R}$ och frågan om det reella talets existens och natur. Relationen mellan den symboliska representationsprincipen och de typiska axiomatiska formuleringarna av de reella talens fullständighetsegenskap, består bland annat i det att både gränsvärdet till en växande och begränsad följd av reella tal och den minsta övre gränsen till en uppåt begränsad mängd av reella tal, på ett schematiskt sätt kan introduceras som symboliska konstrukter ' $L = L[(a_n)]$ ' och ' $S = S[M]$ ' konstituerade genom vissa formella approximationsvillkor; varav en förstås kommer att vara att varje element i talföljden respektive mängden får sägas vara mindre än eller lika med konstrukten. På analogt sätt kunde man införa 'gränsvärdet till en cauchyföljd' eller den tänkta 'gränspunkten till ett dedekindsnitt' som symboliska konstrukter.

Vi återupptar det här tankespåret i andra texter.

3.3.4 Ett identitetskriterium för de reella talen? Oskiljaktighet upp till bråk

Den praktiska beskrivningen av de reella talens kalkyl kommer dessutom behöva kompletteras med ytterligare något kriterium, som fastställer när två symboler får sägas utgöra, representera, motsvara 'samma' reella tal. Detta ger också ett kriterium för när två reella tal får identifieras under likhetstecknet. Ett sådant kriterium anger ett villkor på varje möjlig teori för de reella talen.

Kanske kunde följande vara en möjlig formulering?

[19] *Låt a och b vara reella tal. Då är a och b identiska ($a = b$) om och endast om a och b är oskiljaktiga upp till bråk.*

Med **oskiljaktighet upp till bråk** menar vi här att varje rationellt närmevärde till a , tillika är ett närmevärde till b med samma felgräns, och vice versa. For-

mellt:

$$q_1 \leq a \leq q_2 \iff q_1 \leq b \leq q_2$$

för alla $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$. Med den notation som introducerades i avsnitt 2.4.3 kan villkoret också skrivas:

$$a = q \pm \varepsilon \iff b = q \pm \varepsilon$$

för alla rationella tal q och noggrannheter $\varepsilon > 0$.

Två reella talsymboler får alltså *identifieras under likhetstecknet* då och endast då de är oskiljaktiga upp till bråk. Denna beskrivning är jämförbar med det identitetskriterium för $\mathbb{Q}$ som fastslår när två bråk ska sägas representera samma rationella tal, och därmed får identifieras under likhetstecknet (nämligen att $a/b = c/d \iff ad = bc$). Av denna anledning kunde vi förslagsvis kalla den princip som står på display för **identitetskriteriet** (eller **identitetsprincipen**) för $\mathbb{R}$.

Med hjälp av detta identitetskriterium kan man till exempel visa att $\sqrt{a}$ är ett unikt reellt tal ungefär på så sätt:

Antag att det finns två reella tal b och b' som för det givna positiva reella talet a uppfyller approximationsregeln för kvadratrötter. I så fall är b och b' oskiljaktiga upp till bråk, och enligt identitetskriteriet [19] får de identifieras under likhetstecknet. Med andra ord, kvadratroten är unik.

Andra möjliga och ekvivalenta sätt att formulera identitetskriteriet vore de här:

[20] *Låt a och b vara reella tal med (a_n) och (b_n) som approximerande talföljder (cauchyföljder), det vill säga, följder av successivt bättre rationella närmevärden till a respektive b . Då är $a = b$ om och endast om differensföljden $(a_n - b_n)$ går mot noll, då index n går mot oändligheten.*

[21] *Låt a och b vara reella tal med dedekindsnitten (A_1, A_2) respektive (B_1, B_2) , där A_2 och B_2 saknar minsta element i $\mathbb{Q}$. Då är $a = b$ om och endast om $A_1 = B_1$.*

Den långa tråden om $0,999\dots = 1$

Låt oss titta på följande ”uppgift” för att illustrera identitetskriteriets användning:

”Visa att $0,999\dots = 1$ ”

Även om uppgiften kan uppfattas som en smula fånig, har jag valt den av två anledningar. Den ena är att det är en typ av fråga som för matematikstudenten kan ge den där säregna upplevelsen av oklarhet rörande elementär matematik, där man inte riktigt vet vad man ska säga: ”Men hur vet vi att det *överhuvudtaget* existerar ett reellt tal svarande mot den oändliga decimalutvecklingen $0,999\dots$; även om den *närmar sig* 1 så är den ju aldrig *exakt* 1?”, och så vidare. Den andra anledningen är att jag faktiskt har sett denna och liknande frågeställningar debatteras i långa trådar på vissa internetforum, under rubriker som ”Den långa tråden om $0,999\dots = 1$ ”, där ett flertal olika förslag på hur man kunde resonera presenteras.

1. — Ett sätt att inledningsvis behandla uppgiften är att först ställa en kritisk *motfråga*:

”Gemensamt för oss här är en liten bit notation, oavsett vilka bilder vi förknippar med det. Uttrycket ' $0,999\dots = 1$ ' kan uppfattas ur flera olika synvinklar. Uppfattar du vänsterledet som en decimal approximation av 1, som beteckningssättet för en oändlig serie, som en egen symbol separat från 1? Olika svar är passande beroende på tolkning av skrivsättet.”

Här är tre olika sätt att tolka likhetspåståendet:

(a) Det bästa närmevärdet till 1 upp till tre decimaler, och som samtidigt är strikt mindre än 1 är 0,999; men 0,999 är inte exakt lika med 1 — ett trivialt påstående.

(b) Den oändliga följd av delsummor till decimalserien

$$C = \sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-n} = 0 + 0,9 + 0,09 + 0,009 + \dots$$

har gränsvärdet 1, när n går mot oändligheten. Med matematisk notation

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 1$$

eller

$$\sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-n} = 1$$

Detta är ett påstående, som kan bevisas utifrån den vanliga ε - n -definitionen av gränsvärdet till en talföljd.

(c) Den som formulerar ”uppgiften” kan dock vilja antyda att vi här ska uppfatta vänsterledet som beteckningssättet för en *separat talsymbol* jämfört med högerledet.

2. Detta föranleder följande alternativa förslag till frågans bemötande, men som istället baseras på framställningen i det här dokumentet: Låt oss på ett helt abstrakt sätt *introducera* en matematisk kvantitetssymbol $C = C[\{C_n\}]$, för vilken den rationella talföljden $\{C_n\} = \{0, 0.9, 0.99, 0.999, \dots\}$ är en av dess följder av successivt bättre approximationer (en cauchyföljd). Denna formella introduktion innebär ju nu att symbolen C kan approximeras med decimaltal till varje given noggrannhet, alltså inom varje felgräns $\varepsilon > 0$. Det finns en teknik, en metod för att beräkna allt bättre närmevärden till den. Jag kan till exempel säga att ” C är definitivt större än 0,9999”. Närmare bestämt uppfyller C följande approximationsvillkor:

$$\begin{aligned} C_n &\leq C \\ C &\leq 1 \quad (= C_n + 10^{-n}) \end{aligned}$$

(Observera att vi i detta fall inte kan säga strikt olikhet, eftersom serien inte är en decimalsummeföljd enligt den normala approximationsregeln, som utesluter en oändlig upprepning av 9:or.) Ur representationsprincipen följer förstås att C utgör, representerar, korresponderar mot ett reellt tal, med exakt samma approximationsegenskaper som C . Och för enkelhetens skull väljer vi samma beteckning för det reella talet — nämligen C .

3. Faktum är att närmevärdet $C \approx 1$ kommer att fungera inom varje felgräns: $C = 1 \pm \varepsilon$, för alla $\varepsilon > 0$. Med $\varepsilon = 0,01$ har vi felintervallet $0,99 < C \leq 1$, vilket visar att C är 1 till inom en hundraedel; med $\varepsilon = 10^{-6}$, en miljondel, får vi felintervallet $0,999\,999 < C \leq 1$, vilket visar att C är 1 till inom en miljondel; och så vidare bortom minsta kvadriljondel. Enligt identitetskriteriet [21] gäller alltså att $C = 1$. $\square$

3.3.5 Tecknet och symbolen

Betrakta dessa matematiska påståenden:

$$(\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$$

Talet kvadratroten ur två upphöjt till två är lika med talet två

Arean av cirkeln är precis lika stor som pi gånger kvadraten på radien stycken

areaenheter

$$A = \pi r^2$$

För alla reella tal a och b gäller att $a \cdot b = b \cdot a$

Dessa påståenden innehåller allesammans förekomster av vad vi här omväxlande har kallat för ett/en:

(matematiskt) tal
talsymbol
kvantitativ symbol
kvantitetssymbol
matematisk kvantitet

Vi har i texten behandlat dem som utbytbara. Exempel på talsymboler är '5', ' $\sqrt{2}$ ' och 'det reella talet a '.

Här tror jag det är viktigt att man gör sig själv uppmärksam på skillnaderna inom sambandet mellan **(tecken)gestalt**, **beteckning** respektive **symbol**. Det är mycket vanligt att folk, när de säger "matematiska symboler", bara tänker på eller avser de typografiskt säregna och ideografiska beteckningssätt som är karakteristiska för vetenskaper som matematik, fysik och kemi. Det man då syftar på, vill tala om, kan förtydligas genom att istället säga gestalter, beteckningssätt, notation, skrivsätt, med mera.

En symbol, tänker vi oss här, är något mer än bara sin yttre typografiska, grafiska, akustiska eller annan gestalt. Det är någonting som intar en speciell roll i språket eller i det mänskliga livet — i det här sammanhanget matematiken. I dess roll som symbol får olika bestämda gestalter fungera som *referenspunkter* för symbolens användning eller uppdykande i livet, språket eller matematiken. Men två olika gestalter kan fortfarande vara eller fungera som en och samma symbol. Om vi för ett ögonblick glömmer vilken mening eller roll de har, så är följande några få exempel på teckengestalter:

$$\sqrt{2} \quad 2^{1/2} \quad \text{kvadratroten ur två} \quad \text{sqrt}(2)$$

Om vi åter låter oss minnas den funktion de har inom matematiken kan man säga att dessa fyra tecken eller gestalter allesammans utgör, representerar, svarar mot, är förbundna med precis en och samma symbol. De tjänar som referenspunkter för samma matematiska symbol.

En symbol är med andra ord inte bara en grafisk eller akustisk gestalt. Symbolen har en mening eller personlighet kan man säga. En symbol pekar utöver det ome-

delbart givna. Den har alltid en mer eller mindre bestämd roll utöver det som är sinnligt påtagligt i tecknet. Det omedelbart, sinnligt, givna kan då vara exempelvis de skrivna tecknen på pappret eller det konstnärliga uttrycket (formationen) genom en bild eller en skulptur. I en saga skulle en resande person kunna tolkas eller uppfattas som en symbol för människans hela liv och sökande efter meningen med det, och i det fallet är gestalten 'den resande' något mer komplext än en statisk bild eller matematiska skrivtecken, eftersom formationen byggs upp av hela berättelsen i växelverkan med det språk och den kultur som gör sagan begriplig som helhet. I andra fall, som med matematiska tecken såsom " $\sqrt{2}$ ", gäller det omvända. Själva tecknet är enkelt nog — det är några streck på papper — och går för det mesta rätt så smidigt att ersätta med andra tecken: man kan till exempel skriva det alfabetiska "roten ur två" eller som i många programmeringsspråk "sqrt(2)" istället för som vanligt " $\sqrt{2}$ ". Däremot är den symboliserande funktion som dessa tecken intar i språket, vad de 'pekar mot' eller vilken 'roll' de har, inte lika lätt att sätta fingret på. Rollen, personligheten, meningen är inte något som står skrivet där på pappret. Den visar sig endast genom hur tecknen kommer till användning i människornas liv, i den matematiska praktiken.

Nu är det dessutom så att $\sqrt{2}$ utgör en speciell *typ av symbol* kallad tal. Den har en roll eller personlighet som gör det lämpligt att kalla den för just ett tal, en talsymbol, en kvantitetssymbol, och så vidare. Vidare tillhör $\sqrt{2}$ en speciell *kategori av talsymboler* inom typen tal kallad för en *konstant*, *konstantsymbol*. Jämfört med denna symbol är 'det reella talet a ' ett exempel på en *variabel*, *variabelsymbol*. I det förra fallet är frågan "Ungefär hur mycket är roten ur två?" meningsfull och helt på sin plats. I det senare fallet, med variabelsymbolen 'det reella talet a ', är denna fråga inte aktuell. Däremot kan man meningsfullt säga saker som "Antag att a är större än 10".

När vi säger att " $\sqrt{2}$, π och a är tal/talsymboler" är detta att jämföra med att säga "Blå, röd och grön är färgord". Bestämningen 'tal' eller 'talsymbol' har en funktion i språket, i *grammatiken*, som påminner om den 'färgord' har. Den placerar de här symbolerna inom samma typ av symboler och anvisar dem därmed sin plats i matematiken, genom de regler som gäller just för talsymboler. Dessa regleringar är ibland klart uttalade, men ibland inte så klart uttalade (och detta kan ställa till förvirring). Vår intention här i texten har varit att explicitera de regler som är centrala i det praktiska arbetet med att studera, tillämpa eller forska i matematik.

Naturligtvis finns det olika *sorters* tecken och symboler. De symboler Jung talar om

i sin skrifter — barnets och drömmens symbolspråk, det arketypiska, mytologins och sagans symboler — är förstås symboler i en annan mening än matematiken, kemins eller fysikens notation och symboler. De senare kännetecknas av offentlighet och en hög grad av principiell arbiträrhet. Matematikens talsymboler kunde beskrivas som *operativa symboler*, i det att språket tillåter oss att på olika sätt operera med dem.

3.3.6 ”Hur vet man att kvadratroten verkligen existerar?”

Vad man i matematiken tar som intäkt för att någonting sådant som ’kvadratroten ur två’ existerar är inte oberoende av historiska omständigheter. Under antiken rörde man sig, som sagt, inte med något självständigt och av geometrin oberoende talbegrepp ’reellt tal’ eller ’irrationellt tal’. I den utsträckning de hade tillgång till en rent aritmetisk taluppfattning, så sträckte den sig till positiva heltal (och kanske bråk).

Ett slags *geometriskt* argument för ’kvadratrötternas existens’ sker med hänvisning till geometrisk kontinuitet:

”Vi kan rita en kvadrat med arean $1,4^2 = 1,96$ areaenheter och en kvadrat med arean $1,5^2 = 2,25$ areaenheter. Den första kvadraten kan förstoras till den andra genom en kontinuerlig rörelse. Under en sådan kontinuerlig rörelse passerar vid någon tidpunkt en kvadrat med arean lika med 2 areaenheter. Sidan i den kvadraten har längden $\sqrt{2}$ längdenheter.”

Ett annat slags geometriskt argument hänvisar till konstruerbarhet (med passare och linjal):

”Eftersom vi kan konstruera en kvadrat på en sträcka, så kan också en sträcka med längden $\sqrt{2}$ konstrueras, givet ett val av enhetssträcka.”

Under nyare klassisk tid i Europa skulle den här sortens geometriska argument fortfarande kunna väga tyngre än formella–algebraiska argument. Det finns även idag många människor som skulle uppleva att geometriska resonemang är klarare, mer överskådliga och bättre som bevis än aritmetiska.

I modern matematikvetenskap har man haft en benägenhet att se saken tvärtom: att en aritmetisk–algebraisk redogörelse väger tyngre än en geometrisk. Detta är förstås inte en ren slump, utan det har sina skäl och omständigheter.

Oavsett vad man anser vara ett 'klart argument' eller ett 'stringent bevis' i matematiken, består den här textens specifika klarhet endast i att den beskriver praxis: vi räknar med $\sqrt{2}$ i matematiken och i fysiken och andra tillämpningar och det finns ingen helt *uppenbar* anledning för oss att sluta med det.

De tankespor som jag velat lyfta fram en aning är dessa:

(A) Att det reella talbegreppet i praktiken är intimt förenat med metoder samt begrepp som feluppskattning, närmevärde, approximation, felgräns, med mera, och att denna sida av praxis är mer primär, fundamental, jämfört med varje mängdteoretisk eller axiomatisk-deduktiv ansats.

(B) Att det reella talets existens kan fattas som varande av symbolisk karaktär, och att man liksom när det gäller symbolik överhuvudtaget, kan 'ha glädje' av ett symbolspråk (såsom ett religiöst språk) utan att därmed ta för givet att det symboliserade eller genom symbolen förverkligade nödvändigtvis måste legitimeras i någon i förhållande till det givna symbolspråket, logiskt eller ontologiskt, extern bemärkelse.

Genom symbolen blir en sorts dimension eller verklighet tillgänglig, som inte vore eller är tillgänglig på något annat sätt än just genom tecknet, genom referenspunkter varigenom det symboliska blir till en realitet i den mänskliga, levda, praktiska verkligheten. Det går till exempel inte att tala om reella tal utan att använda beteckningar som "ett reellt tal", "det reella talet a ", "kvadratroten ur två", och så vidare.

3.3.7 Ett försök till definition?

Det finns ingenting sådant som en standardiserad definition av termen 'reellt tal' i matematiken. Det finns ett antal *definitionsförslag*, som kan härledas till tiden för den matematikhistoriska process under 1800-talet som brukar heta *analysens aritmetisering*. Dessa definitionsförslag går under namnet de mängdteoretiska konstruktionerna av de reella talen. Men ett försök till definition, ett definitionsförslag, är inte samma sak som en universellt accepterad matematisk definition, såsom den av ett primtal.

Om man inskränker det svenska ordet "tal" — motsvarande engelskans "number" — till att endast gälla de typer av tal man rör sig med i matematikundervisningen på gymnasiet och i sannolikt mer än 99% av allt arbete med och undervisning i matematik på universitet och högskolor runtom i hela världen, och i så gott som

all teknisk–naturvetenskaplig forskning, så är det sant att:

[*] ”Ett tal är reellt om och endast om det på ett entydigt sätt låter sig approximeras med rationella tal (bråk) till varje given noggrannhet $\varepsilon > 0$.”

Till detta med approximerbarhet hör saker som att det i princip alltid är möjligt att säga om det reella talet K huruvida det ligger inom ett givet rationellt intervall $[q_1, q_2]$ eller inte. Detta grundläggande faktum om de reella talens kalkyl har vi här valt att kalla för *approximationskriteriet*.

Man skulle kunna uppfatta [*] som ett ’förslag på definition’ av de reella talen. Till formen är det analogt, har påtagliga likheter med det vanliga sättet att definiera rationella tal i läroböckerna: ”Ett rationellt tal är ett tal som kan uttryckas som ett bråk p/q -delar.” En formulering som ligger nära [*] finner man i Persson och Böijers *Analys i en variabel*:

I *princip* [principiellt, min kurs. och anm.] kan alla irrationella tal approximeras *godtyckligt noggrant* med rationella tal. Man talar också om dem som *gränsvärden* av rationella tal. Oftast antyder man detta genom att skriva ett sådant tal som ett icke avslutat decimaltal, till exempel

$$e = 2.718\dots$$

Detta betyder inte att man känner alla följande decimaler, bara att decimalutvecklingen fortsätter.¹⁶

Jag har dock aldrig sett [*] som ett *explicit* förslag på definition, i någon av de läroböcker som används på svenska universitet och högskolor. Men om en student (eller någon annan) ställde mig frågan ”Vad är ett reellt tal?”, så är det sakförhållande läroboksförfattarna omnämner en av de mest grundläggande saker som studenten behöver ha kännedom om, och därför något som hör till det raka försök till svar som jag personligen *vore beredd att ge*. Det vill säga, det finns inget annat svar som jag egentligen tycker är så värst mycket bättre och mer matematiskt ”stringent”. Det är *de facto* det bidrag till frågan som eleven kunde ha mest praktisk nytta av i arbetet med att lära sig och bli förtrogen med matematiken.

Det är troligtvis av samma anledning som många läroböcker i analys för högskola och universitet inleder boken med att beskriva de reella talen i termer av möjligheten till decimalutveckling — och inte, till exempel, som en ekvivalensklass i mängden av alla cauchyföljder eller som ett dedekindsnitt i mängden av alla ra-

¹⁶Arne Persson & Lars-Christer Böijers. *Analys i en variabel*, s. 5. Studentlitteratur, Polen, 2010.

tionella tal. Ekvivalensen [*] har likheter med andra vanliga beskrivningar, varav samtliga pekar i den här riktningen:

[**] ”Ett tal är reellt om och endast om det på ett entydigt sätt kan approximeras med decimaltal till varje given noggrannhet $\varepsilon > 0$.”

Den här karakteriseringen går på sätt och vis på ett ut med att säga: ”Ett reellt tal är ett tal som kan decimalutvecklas” — en formulering som man finner i en del läroböcker.

Dessa två displayer — [*] och [**] — uppfattade som kriteriebeskrivningar är matematiskt ekvivalenta. Approximerbarhet med bråk implicerar approximerbarhet med decimaltal och vice versa. Med andra ord: approximerbarhet med bråk är matematiskt ekvivalent med approximerbarhet med decimaltal.

Jag säger inte att det är nödvändigt att uppfatta saken som en fråga om definition. Man kan framförallt se approximationsprincipen som en kriteriebeskrivning. Den är användbar som en sorts karakterisering av de reella talen. Den täcker alla reella tal och utesluter komplexa tal (varje komplext tal kan approximeras med två bråk, men inte bara med ett). Jag är egentligen inte ute efter någon definition, men frågan återstår ändå: hur kommer det sig att [*] inte redan är allmänt accepterat som en standarddefinition av de reella talen, liksom det finns för de rationella talen och begreppet primtal, när det ändå tycks ligga så nära till hands?

Jag kan se åtminstone två omständigheter som motverkar [*] såsom definitionsförslag. Det ena har att göra med de lingvistiska former som gäller för en ”*Definition 1.2.3 ...*” i typiska avhandlingar inom samtida matematikvetenskap. Påståendet är svårt att passa in inom de språkliga och formella ramar som gäller för en definition inom det omfattande arkitektoniska system av termer, notation och samband, som kunde kallas *den mängdteoretiska katedralen*.

Det andra har att göra med uppkomsten av den så kallade *icke-standardanalysen* och dess *hyperreella talsystem*. Icke-standardanalysen uppfanns eller utvecklades av matematikern Abraham Robinson på 1960-talet. I korthet handlar det om ett slags formellt återupplivande av Leibniz infinitesimaler genom mängdteoretiska konstruktioner. ’De hyperreella talen’ formar en sorts abstrakt utvidgning av $\mathbb{R}$, som förutom ’standardtal’ tillåter räkning med ’icke-standardtal’. Ett icke-standardtal är antingen ändligt eller oändligt, en *infinit*. Ett ändligt icke-standardtal präglas av en ’oändligt liten avvikelse’ från ett standardtal, och kan formellt skrivas som en standarddel plus en *infinitesimal*, ett ’oändligt litet tal’. De ändliga icke-standardtalen bildar så att säga en svärm av oändligt små avvikelser

från standardtalen. Om Δ är en infinitesimal, så är $1 + \Delta$ ett icke-standardtal med standarddelen 1 och icke-standarddelen Δ . Inom de reella talen är det inte 'möjligt' att urskilja $1 + \Delta$ från 1, och alltså går dessa heller inte att skilja åt med bråk, vilket skulle göra "definitionsförslag" [*] ogiltigt. Det här kan låta som en massa hokus pokus, men faktum är att det i en formell mening är möjligt att utveckla hela den matematiska analysens sedvanliga repertoar av satser och andra verktyg med de hyperreella talens taktik, istället för ε - δ -formalismens gränsvärden.

Ett sätt man skulle kunna komma runt den här andra punkten vore att tala om korrespondens eller representation istället för identitet:

[*'] *"Om ett tal är ett reellt tal så kan det på ett entydigt sätt approximeras med bråk till varje given noggrannhet $\varepsilon > 0$. Omvänt, om ett tal K entydigt kan approximeras med bråk till varje $\varepsilon > 0$, så finns det ett reellt tal K' som uppfyller exakt samma approximationsvillkor som K ."*

Jämför detta med den representationsprincip vi formulerade i tidigare avsnitt. På så sätt skulle man komma runt det undantag som Robinsons infinitesimaler innebär.

Denna formulering [*'] har inte den typiska logiska form som hör till en definition inom ett axiomsystem, enligt den moderna förståelsen, utan den av ett axiom eller teorem. En *definition* inom ramen för en modern axiomatisk-deduktiv presentation måste nämligen, strängt taget, vara en ekvivalens $A \iff_{\text{def}} B$ ("A gäller, per definition, om och endast om B") som i princip tillåter utbyte av varje förekomst av definiendum A med definiens B . Ett bra exempel på något som utgör en definition som faktiskt följer det här mönstret är definitionen av ett primtal. Som en ekvivalens kan denna formuleras:

$$p \text{ är ett primtal} \iff_{\text{def}} p \text{ är ett heltal större än } 1 \text{ och de enda positiva heltalsdelarna till } p \text{ är } 1 \text{ och } p$$

Om vi i satsen "Det finns oändligt många primtal" ersätter definiendum 'primtal' med definiens får vi "Det finns oändligt många objekt p som är heltal större än 1 och vars enda positiva delare är 1 och p " — två påståenden som uppfattas som samma meddelande.

Ett axiom fattas dock som "en sorts" definition, nämligen som en *implicit definition* av de termer som axiomen uttalar sig om ('punkt', 'sträcka', etc). Kunde man kanske då istället säga att [*] eller [*'] "utgör axiom i matematiken", om än inte "definitioner strängt taget"? Svårigheten tror jag här har att göra med den första punkten: den mängdteoretiska katedralen och dess status av påstådd grundval för

hela matematiken. Termen 'tal' är, till skillnad från 'mängd', inte en primitiv term i mängdteorin och dess mest välkända axiomsystem. Faktum är att till och med den i läromedlen vanligt förekommande definitionen av rationellt tal som ett tal som går att uttrycka, skriva som ett bråk, noga räknat inte utgör en definition inom den arkitektonik mängdkatedralen sätter. Om man inom katedralen frågar efter en definition av 'rationellt tal' kommer denna se mycket annorlunda ut, och inte innehålla termer som 'uttrycka' eller 'skrivas som'. Av de exemplifierade är det bara definitionen av primtal som håller måttet. Observera att denna definition inte försöker definiera heltal överlag, utan blott skilja ut en viss typ av heltal inom mängden $\mathbb{Z}$ av heltal, som i katedralen "konstrueras" utifrån $\mathbb{N}$, mängden av naturliga tal.

Dock: det är här inte alls min avsikt att faktiskt lägga fram ett förslag på definition. Tanken att vi när det gäller matematiken alltid skulle vara i behov av ett system av axiom och definitioner, följande något visst mönster för vad som får anses vara detta, för att nå klarhet (eller nå en känsla av stringens och säkerhet) med ett matematiskt begrepp eller en symbol går i sig att ifrågasätta. Det är inte märkligare än hur det är med vårt modersmål överlag: vi lär oss ju för det mesta inte de tusentals olika ordens bruk genom någon allmän mönstergill definition, utan snarare genom något sådant som en dans med orden, mot bakgrund av en oerhört sinnrik väv av situationer, verkliga omständigheter.

Satser som "Varje sträcka har en bestämd längd, som kan anges med ett bestämt reellt tal", "En sträcka är en längd utan bredd", och så vidare, utgör eller kan betraktas som grammatiska anmärkningar, i Wittgensteins mening. På samma sätt undrar jag om man inte kunde säga att satsen "Varje reellt tal kan approximeras med bråk" är en grammatisk reglering av termen 'reellt tal', som etableras och får fastare konturer under 1800-talet. Den säger oss något om vad aktuell matematisk praxis tillåter alla gymnasieelever, ingenjörstudenter, fysiker, och så vidare, att utan risk *säga* om en given reell konstantsymbol eller variabelsymbol. Anmärkningen uttalar sig så att säga om den 'makt' eller 'kraft' som är investerad i begreppet reellt tal. Dedekinds konstruktion av $\mathbb{R}$ är ett av bidragen till den historiska processen av begreppens inbördes reglering.

3.3.8 Konstruktion av $\mathbb{R}$ och det symboliska perspektivet

Samtliga av de mängdteoretiska (så kallade) konstruktionerna av $\mathbb{R}$ utgår från approximations-, representations- och identitetskriteriet som normen för varje möjlig konstruktions vettighet.

Men den fråga man därmed kunde ställa är om det är 'nödvändigt' att genomföra konstruktionen i just *mängdlärans* symbolspråk och terminologi? Kan man inte tänka sig en 'konstruktion' av de reella talen som helt enkelt består i ett påminnande, förtydligande och återuppförande av de regler som gäller för reella tal i den redan givna praktiken, men där man istället talar direkt i termer av symboler såsom $\sqrt{2}$, π och decimalseriens summa D ? Hur detta kunde se ut har vi inledningsvis skissat på i den här uppsatsen.

För att 'försäkra sig om' att till exempel varje decimalsummeföljd (decimalutveckling) 'konvergerar mot ett reellt tal' inför man i de mängdteoretiska approacherna olika former av mängdkonstruktioner som ska satisfiera approximationskriteriet. Definitionen av dessa mängder utförs dock mot bakgrund av regler som i den matematiska och vetenskapliga praktiken redan är accepterade och normbildande. *Den fundamentala regel* som bestämmer hur den mängdteoretiska konstruktionen av 'summan av en decimalutveckling' överhuvudtaget får göras från första början är den följande:

[22] *Låt $\{D_n\}_{n=0}^\infty$ vara en decimalutveckling och antag att D är dess summa. Då gäller att*

$$(i) \quad D_n \leq D$$

$$(ii) \quad D < D_n + 10^{-n}$$

för varje $n \in \mathbb{N}$.

Detta är det i praktiken accepterade villkor som tas som utgångspunkt för alla mängdteoretiska konstruktioner av decimaltalsseriens summa.

Men därav inser vi att man lika gärna kunde ta detta kriterium direkt för införandet av decimalseriens summa som en symbolisk konstrukt, utan att så att säga behöva gå omvägen via 'oändliga klasser av cauchyföljder' eller 'snitt i den oändliga mängden av rationella tal'. Men den fråga som jag ställer mig är varför 'konstruktionen' då alls skulle behöva göras i mängdlärans symbolspråk och skepnad? Man inför en formell-algebraisk symbol $D = D[\{D_n\}]$ som är *definierad* av approximationsvillkoren (i) och (ii). Detta vore inte ett objekt av typen mängd, utan just det vi (med inspiration från Hermann Weyl) här betecknar en symbolisk konstrukt. Det verkar inte finnas någon som helst logiskt tvingande nödvändighet i att gå rutten genom mängdläran.

I modern matematik har det sedvanliga återuppförandet av någon mängdteoretisk konstruktion (typiskt Cantors cauchyföljdsmetod eller Dedekinds snittmetod) nå-

got av en *rituell* karaktär. Det är inte som att man i kurserna gör särskilt mycket av dem därefter. Det är inte som att man behöver dessa konstruktioner i (merparten av) matematisk problemlösning och tillämpning. Dock kan man tänka sig att situationen såg annorlunda ut bland 1800-talets forskare. Där får jag intrycket av att man kunde säga att de mängdteoretiska konstruktionerna hade en viktig "retorisk" roll, vars effekt var att framkalla *en förvandling av åskådningssättet*, en aspektväxling. Man blev övertygad om att acceptera viss terminologi och sätt att se på de redan i den operativa vetenskapliga praktiken befintliga talsymbolerna. Väsentligen att det irrationella 'reella talet' inte är något ogripbart eteriskt objekt vid sidan om sättet att approximera det, utan just själva dessa *villkor för approximationen själv*. Att reella tal 'kan approximeras till vilken noggrannhet som helst' reflekterar i dagsläget beslut inom samfundet av naturvetenskapliga forskare, ingenjörer och matematiker — nämligen ett *grammatiskt* beslut rörande en viss *term* och dess användning.

Men samtidigt är behovet av något slags objekt att peka på i en viss typ eller nivå av tänkande oerhört starkt (här talar jag också av egen erfarenhet). På grund av den här starka upplevelsen av behovet av en ny värld av objekt varigenom den gamla kan betraktas, införde man en ersättning för 'det förlorade objektet': nämligen abstrakta mängder, vilka på somliga håll kom att uppfattas som den egentliga, bakomliggande realiteten.

Det symboliska perspektivet på matematiken innebär bland annat den tanken att man överhuvudtaget aldrig behöver leta efter eller uppfinna något slags flyende, ogripbart, eteriskt objekt vid sidan av det som redan är givet i praktiken, för att komma till klarhet med sådant som de irrationella talen och deras problematiska existens. Det objekt som vi verkligen behöver finns redan *här*, rakt framför oss, bara att dess natur behöver klargöras. Och detta 'objekt' är ingenting mindre och annat än *den matematiska symbolen*.

Så till exempel är det objekt som *tecknet* " $\sqrt{2}$ " står för eller refererar till (om man så föredrar) *den operativa symbolen* $\sqrt{2}$. Det objekt som notationen " $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ " svarar mot är den operativa (komplexa) symbolen $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$. (Även mängdlärans symbolspråk går att förstå på det här sättet.) Som operativa symboler är de på ett invecklat sätt led i människans matematiska verksamhet. De utgör själva *formerna* för tecknets användning: som tecken, gestalter, beteckningar kan " $\sqrt{2}$ " och " $2^{1/2}$ " fungera på samma sätt i praktiken, ha samma form för sin användning, och därmed konstituera samma symbol, även om de utgör olika tecken.

3.4 Förslag på vidare läsning

Klassiska texter

Euklides: *Elementa* Bok V

Behandlar Eudoxos lära om proportioner för att handskas med inkommensurabla storheter i geometrin.

Isaac Newton: *Universal Arithmetick* (1720, postumt utgiven, efter föreläsningssanteckningar)

Leonhard Euler: *Introduction to the Analysis of the Infinite* (1748)

Euler utnyttjar förstås den klassiska analysens äldre terminologi och talar om 'kvantiteter', 'konstant kvantitet', 'variabel kvantitet', med mera.

Richard Dedekind: *Essays on The Theory of Numbers* (1872–88)

Här introducerar Dedekind sin snittmetod

Georg Cantor: "Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen" (1872)

Här introducerar Cantor cauchyföljdsmetoden

G.H.Hardy: *A Course of Pure Mathematics* (1st ed. 1908)

Går igenom konstruktionen som dedekindsnitt

Bertrand Russel: *Introduction to Mathematical Philosophy* (1919)

Moderna läromedel

Persson & Böijers: *Analys i en variabel* (2010) och *Analys i flera variabler* (2005)

Ger en klargörande beskrivning av de reella talen i inledning och appendix.

Anders Vretblad: *Algebra och geometri* (2006)

Detta är en utökad och reviderad utgåva av den mindre "klassikern" *Algebra och kombinatorik*. Denna bok innehåller en introduktion till metoden med Dedekindsnitt i appendix. Också en bra introduktion till mängdlära och grundläggande formell logik.

Robert Stoll: *Set Theory and Logic* (1979)

Denna innehåller en fullständig genomgång av Cantors cauchyföljdskonstruktion och ger en bra introducerande översikt till mängdlära, formell logik och det formella-algebraiska sättet att tänka.

Matematikhistoria

Jan Thompson: *Historiens matematik* (1991)

Innehåller också en genomgång av intervallinkapsling

Bo Göran Johansson: *Matematikens historia* (2013)

Filosofiska texter

Ett litet urval av filosofiska texter som gett impulser till egna filosofiska reflektioner kring matematiken:

Sören Stenlund: *The Origin of Symbolic Mathematics and the End of the Science of Quantity*. (2014)

Language and Philosophical Problems (1990)

Undersökningar i matematikens filosofi (1988)

Ray Monk: *Geniets plikt. En biografi om Ludwig Wittgenstein*. Detta är den mest utförliga biografen och betraktas som ett "standardverk" även i akademiska kretsar. Flera kapitel innehåller passager om Wittgensteins syn på matematiken.

Ludwig Wittgenstein: *Remarks on The Foundations of Mathematics*

Lectures on The Foundations of Mathematics

Filosofiska undersökningar

Tractatus Logico-Philosophicus

4 Lock/portar

Teorifrågor och frågor till stöd för minnet

F4. Vad innebär (det vi här kallar) den newtonsk–cartesianska konceptionen om det reella talet?

F5. (a) Vad är principen för tallinjens ("tallinjalens") konstruktion?

(b) Är ett reellt tal samma sak som en sträcka eller punkt på en tallinje?

F6. (a) Vilket är matematikens vidaste talbegrepp för bestämning av kvantitet, i betydelsen storleken, antalet, magnituden hos en (fysikalisk) storhet?

(b) Vad menas med diskret respektive kontinuerlig kvantitet?

F7. (a) Hur lyder den typiska definitionen av rationellt tal?

(b) Kan alla rationella tal uttryckas som bråk? Varför då?

(c) Kan alla rationella tal uttryckas som decimaltal? Om nej, ge exempel.

(d) Är alla decimaltal också rationella tal?

F8. Vad menas med att två (geometriska) storheter är kommensurabla respektive inkommensurabla? Kan du ge något exempel?

F9. (a) När säges ett reellt tal vara irrationellt?

(b) Ge tre exempel på irrationella tal.

(c) Vad kan sägas om möjligheten att approximera irrationella tal?

(d) Hur många decimaler på det irrationella talet π behövs som mest i nuvarande teknologiska och naturvetenskapliga sammanhang?

F10. Hur kan följande talmängder betecknas i matematiken:

(a) mängden av rationella tal? (b) mängden av reella tal?

(c) mängden av irrationella tal? (d) mängden av decimaltal (i den här texten)?

F11. Ange delmängdsförhållandena mellan decimaltalen, de rationella talen och de reella talen.

F12. (a) Ge exempel på reella konstantsymboler respektive variabelsymboler.

(b) Ge några exempel på egenskaper som skiljer sig mellan konstantsymboler och variabelsymboler.

(c) Vad kan man säga om reella talsymboler överlag och möjligheten att uttrycka alternativt approximera dem med bråk?

F13. (a) Formulera det vi här kallat för approximationsprincipen (eller ϵ -kriteriet).

(b) Hur kan den formuleras i termer av decimaltal?

F14. (a) Hur kan approximationsprincipen uttryckas i termer av ordningsrelationen?

(b) Vad menas med att en ordningsrelation är linjär? Hur skulle linjäriteten för de reella talen kunna uttryckas i informella termer?

F15. (a) Hur förhåller sig talsymbol, närmevärde och felgräns (noggrannhet) till varandra? Vad menas med en feluppskattning för ett reellt tal?

(b) Vad innebär det att en feluppskattning är grövre än/finare än en annan?

F16. Skriv följande påståenden med matematisk notation:

(a) "Talet K ligger i intervallet mellan 0 och 1"

(b) "Talet K ligger inom ett avstånd av 0,1 från 7"

(c) "4,51 är ett närmevärde till K inom ett avstånd av 0,02"

F17. Vad innebär skrivsätten?

(a) $1/3 = 0,333\dots$ (b) $\pi = 3,1415926\dots$ (c) $1/10 = 0,1$

F18. (a) Vilka är skillnaderna och sambanden mellan begreppen decimaltal, decimalutveckling respektive reellt tal?

(b) Vad innebär det att ett reellt tal har en ändlig respektive oändlig decimalutveckling?

(c) Implicerar en oändlig decimalutveckling alltid ett irrationellt tal?

(d) Vad kännetecknar decimalutvecklingen till ett rationellt tal?

F19. Redogör för några viktiga samband, likheter och skillnader mellan matematikens begrepp 'reellt tal' och fysikens begrepp 'storhet'.

F20. Vad menas (i den här texten) med arvsprincipen (ϵ -kriteriet) för de reella talen?

F21. (a) Vad innebär (löst talat) utvidgningsprincipen (ϵ -kriteriet) för de reella talen?

(b) Hur gör man för att räkna med något av de fyra räknesätten, när minst en term/faktor är en irrationell talsymbol?

F22. Vad innebär (här i texten) approximationsregeln för kvadratrötter?

F23. Ange likheter för uttrycken $\sqrt{a \cdot b}$ samt $\sqrt{a/b}$.

Ett urval av problem

P10. Beräkna $\pi + 6$ till tre decimalers noggrannhet.

P11. Talet e är 2,718 till tre decimalers noggrannhet.

- (a) Ange en feluppskattning för talet e baserat på den givna informationen.
- (b) Skriv närmevärdet till e på formen $e = 2,718 \pm \varepsilon$, där felgränsen ε är vald så liten som möjligt givet informationen i uppgiften.
- (c) Beräkna e^2 med det givna närmevärdet och gör en noggrann feluppskattning.

P12. Ett närmevärde till ett visst reellt tal a har beräknats till $a = 7,82 \pm 0,01$. Bestäm med rimlig feluppskattning:

- (a) $a + \sqrt{2}$ (b) $a\sqrt{5}$

P13. Utveckla uttrycket: (a) $(2 + x)^2$ (b) $4(x - 3)^2$ (c) $(x + 4)(x - 7)$

P14. Förenkla (där $a, b > 0$): (a) $\sqrt{72}/6$ (b) $\frac{\sqrt{36a^3b^6}}{\sqrt{4a}}$